

INTEGRAZIONE PER SEZIONI

$$3 = 1 + 2$$

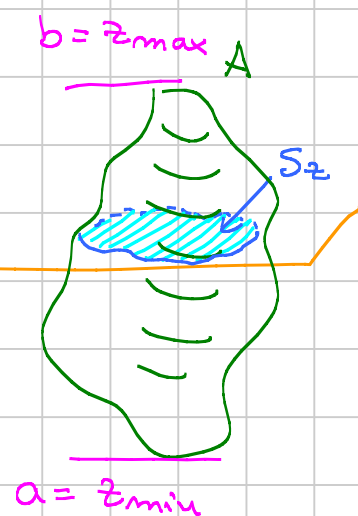
$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove

- a e b sono il min e max valore di z all'interno dell'insieme A ,
- S_z è la sezione di A ad altezza z , cioè

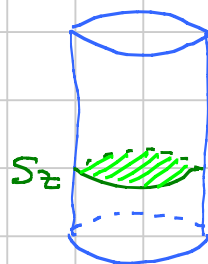
$$S_z := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A \}$$

piano //
piano xy ad
altezza z



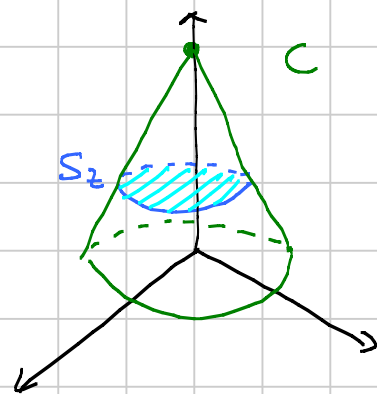
Esempio 1 $A =$ cilindro sezione circ.

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^2 dz \iint_{S_z} z^2 dx dy \\ &= \int_0^2 z^2 dz \iint_{S_z} 1 dx dy \\ &= \int_0^2 z^2 \underbrace{\text{area}(S_z)}_{\pi} dz \\ &= \pi \int_0^2 z^2 dz = \pi \cdot \frac{8}{3} \end{aligned}$$



Esempio 2 $\iiint_C z \, dx \, dy \, dz$

C = cono che ha come base $x^2 + y^2 \leq 1$
e vertice in $(0, 0, 3)$

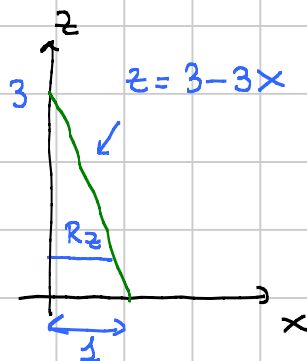


1° modo: per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_0^3 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_0^3 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz \end{aligned}$$

Osservo che S_z è un cerchio di
raggio $R_z = 1 - \frac{z}{3}$

$$= \int_0^3 z \cdot \pi \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz \quad \text{Analisi 1...}$$



$$z = 3 - 3R_z$$

$$R_z = \frac{3-z}{3} = 1 - \frac{z}{3}$$

2° modo: per colonne Devo scrivere C come insieme normale

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{base } \Omega}, 0 \leq z \leq \underbrace{3 - 3\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{eq. cono}}\}$$

$$\iiint_C z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{3-3\sqrt{x^2+y^2}} z \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (3 - 3\sqrt{x^2 + y^2})^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta (1-p)^2 p = 9\pi \int_0^1 p(1-p)^2 dp$$

= controllare che venga uguale a prima
e/o trovare l'errore.

Esempio 3 Calcolare il volume del segmento sferico

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad a \leq z \leq b\}$$

(si intende che $|a| \leq R$ e $|b| \leq R$)

$$\text{Vol}(B) = \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz$$

sezioni $\rightarrow$
$$= \int_a^b dz \iint_{S_z} dx \, dy$$

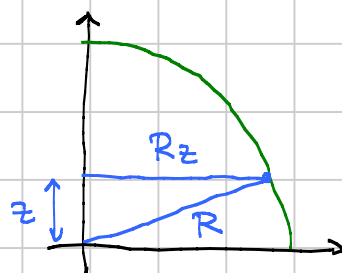
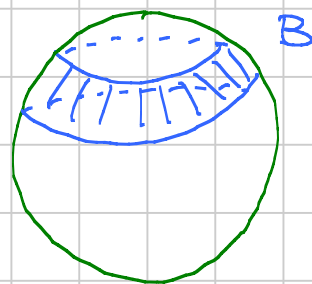
$$= \int_a^b \text{area}(S_z) \, dz$$

S_z è una circonferenza di raggio R_z
tale che

$$R^2 = z^2 + R_z^2 \quad \leadsto \quad R_z^2 = R^2 - z^2$$

$$= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) \, dz = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_a^b$$

$$= \pi \left[R^2 (b - a) - \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \right]$$



Oss. Se prendiamo $b = R$ e $a = -R$ otteniamo

$$\text{Vol}(\text{sfera}) = \pi \left(\underset{-0}{2} \underset{-0}{R^3} - \underset{-0}{\frac{2}{3}} \underset{-0}{R^3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{😊})$$

Principio di Cavalieri

Se due solidi A e B hanno sezioni
di area = ad ogni altezza z,
allora $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(B)$

Dim.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A) &= \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \, \text{Area}(S_{A_z}) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \, \text{Area}(S_{B_z}) \\ &= \text{Vol}(B). \end{aligned}$$

Esempio 4 (Esercizio della tenda) Calcolane

$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz$$

dove T è il tetraedro con vertici in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

1° modo: per colonne

Devo scrivere T
come insieme normale

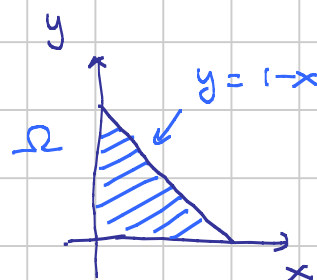
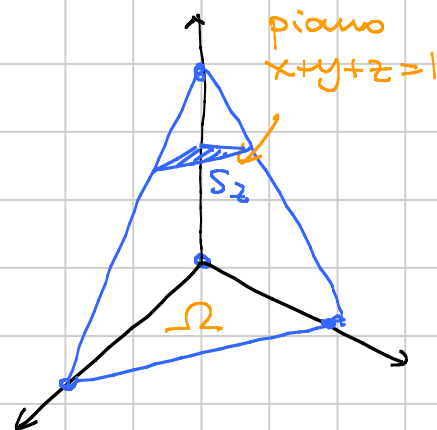
$$T = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 1-x-y \}$$

dove Ω è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Allora

$$\begin{aligned} \iiint_T y \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{1-x-y} y \, dz \\ &= \iint_{\Omega} y \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \iint_{\Omega} y(1-x-y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, y(1-x-y) = \text{si fa.}$$



2° modo: per sezioni

$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} y \, dx \, dy$$

↑
triangolino

va fatto

3° modo: un trucco furbo

simmetria

$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{simmetria}}{=} \iiint_T z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z(1-z)^2 \, dz$$

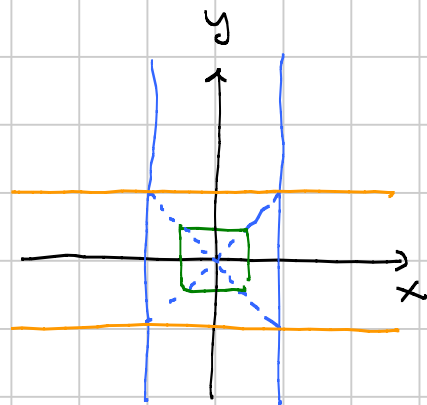
triangolo di lato $1-z$

Esercizio 5 (esempio della FOGNA)

Volume dell'intersezione tra 2 cilindri di raggio 1 e assi $\perp$ e incidenti.

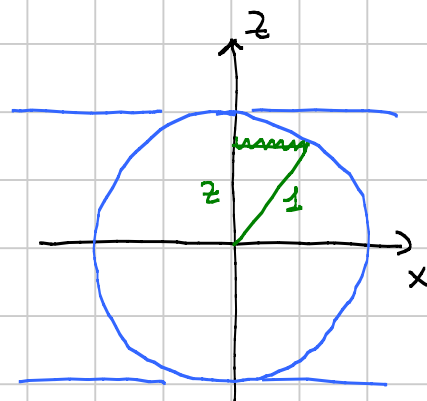
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 \leq 1}_{\text{cilindro 1}}, \underbrace{y^2 + z^2 \leq 1}_{\text{cilindro 2}} \}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A) &= \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz \end{aligned}$$



Chi è S_z ? Tagliando i cilindri ad altezza z ottengo delle strisce ortogonali della stessa ampiezza, quindi S_z è un quadrato!!! Di che lato? Il semilato è $\sqrt{1-z^2}$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) \, dz = \text{si fa.}$$



Varianti $\rightarrow$ fare lo stesso conto per colonne

$\rightarrow$ aggiungere il terzo cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

— o — o —