

Cambi di variabile in generale

Descrizione della formula

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B \overbrace{g(u,v)}^{\text{funzione nelle nuove variabili}} \underbrace{J(u,v)}_{\substack{\text{insieme A descritto} \\ \text{nelle variabili} \\ \text{u e v}}} du dv$$

↑ pagamento
(J sta per determinante
JACOBIANO)

Esempio 1 $\iint_A (y^2 - x^2) dx dy$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \underbrace{x+y}_u \leq 2, 3 \leq \underbrace{x-y}_v \leq 4 \}$$

Sarebbe comodo porre

$$x+y = u \quad x-y = v$$

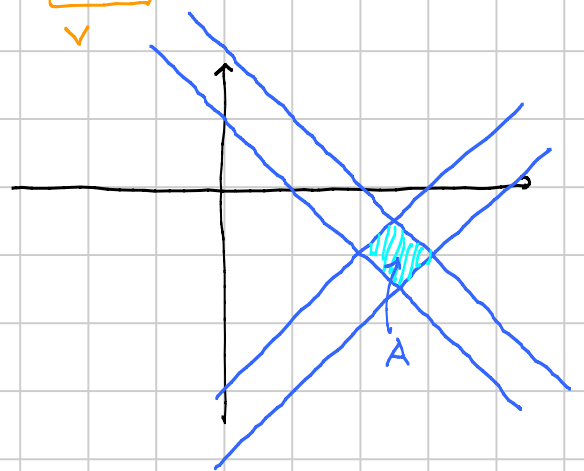
così A insieme diventa

$$1 \leq u \leq 2$$

$$3 \leq v \leq 4$$

La funzione diventa

$$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = -uv$$



Come calcolo $J(u,v)$? Procedura

- ① Ricavo x e y in funzione di u e v
- ② Calcolo la matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$
- ③ $J(u,v) = |\text{Det}|$.

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \quad x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} J(u, v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 - y^2) dx dy &= \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{\text{insieme nelle nuove coord}} \underbrace{(-uv)}_{\substack{\uparrow \\ \text{nuova} \\ \text{funzione}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 u du \int_3^4 v dv = \text{si fa.} \\ &\quad \text{--- 0 --- 0 ---} \end{aligned}$$

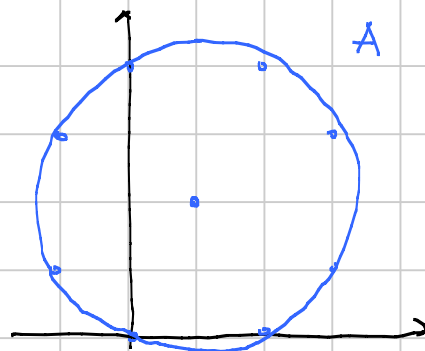
Esempio 2 $\iint_C y^2 dx dy$

$C =$ Cerchio con centro in $(1, 2)$ e passante per $(0, 0)$

Equazione del cerchio

$$\underbrace{(x-1)^2}_u + \underbrace{(y-2)^2}_v = 5$$

L'insieme diventa $u^2 + v^2 \leq 5$



$$\textcircled{1} u = x-1, v = y-2 \quad \leadsto \quad \begin{aligned} x &= u+1 \\ y &= v+2 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Matrice: identità

$$\textcircled{3} |\text{Det}| = 1$$

$$\iint_C y^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 5} \underbrace{(v+2)^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Nuova funzione}}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\downarrow \\ J}} du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 5} (v^2 + 4v + 4) du dv$$

$$\downarrow$$

$$\int v = 0 \text{ per simmetria}$$

Osservo che $\int v = 0$ per simmetria

$$\iint 4 = 4 \cdot \text{Area cerchio} = 4 \cdot \pi \cdot 5 = 20\pi$$

Resta da calcolare solo

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 5} v^2 du dv = \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad \text{polari} \quad p^2 \sin^2 \theta \cdot p$$

$$= \underbrace{\int_0^{\sqrt{5}} p^3 dp}_{\frac{25}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{25}{4} \pi$$

Conclusione $20\pi + \frac{25}{4} \pi.$

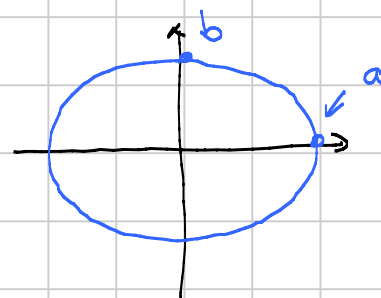
Oss. • Se il cambio di variabili è una traduzione, allora $J=1$

• Se il cambio di variabili è affine, allora

$$J = |\text{Det (matrice)}|$$

Esempio 3 Calcolare l'area dell'ellisse in posizione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$



Viene da porre $\frac{x}{a} = u$ $\frac{y}{b} = v$

L'insieme diventa il cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$

$$\textcircled{1} \quad x = au, \quad y = bv$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(u,v) = |\text{Det}| = ab$$

Conclusione

$$\begin{aligned} \text{Area ellisse} &= \iint_{\text{ell.}} 1 \, dx \, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 1 \cdot ab \, du \, dv \\ &= ab \cdot \text{area}(\text{cerchio}) = \pi ab \end{aligned}$$

Oss. Se $a=b=r$, viene la classica area del cerchio.

Oss. • Ad analisi 1: $\int_a^b 1 \, dx = (b-a) = \text{lunghezza segmento}$
 $= \text{area rettangolo con base } [a,b] \text{ e altezza } 1.$

• Ad analisi 2:

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A) = \text{volume del prisma con base } A \text{ e altezza } 1.$$

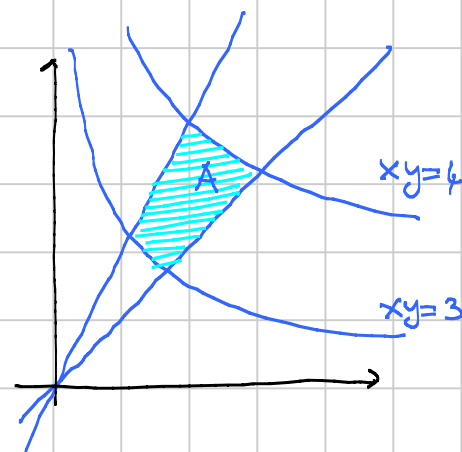
Esempio 4 $\iint_A y \, dx \, dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x \leq y \leq 2x, 3 \leq xy \leq 4\}$$

In cartesiane viene, ma cerco alternative

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2 \quad 3 \leq xy \leq 4$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_u \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_v$



Calcolo $J(u,v)$ "brevemente"

$$\textcircled{1} \quad u = \frac{y}{x} \quad v = xy \quad \leadsto \quad y = \sqrt{uv} \quad , \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{u\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{v}\sqrt{u}} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} J(u,v) := |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} \frac{1}{u} - \frac{1}{4} \frac{1}{u} \right| = \frac{1}{2u}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{\substack{\text{nelle nuove variabili} \\ \text{è un rettangolo!}}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{uv}}}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \underbrace{\frac{1}{2u}}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \\ &= \int_1^2 du \int_3^4 dv \, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du \int_3^4 \sqrt{v} \, dv \\ &= \text{facile conto.} \end{aligned}$$

Procedura alternativa per il calcolo di J : $u = \frac{y}{x}$ $v = xy$

$$\textcircled{2'} \text{ Calcolo } \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3'} |\text{Det}| = \left| -2 \frac{y}{x} \right| = 2 \frac{y}{x}$$

$\textcircled{4'}$ Faccio $\frac{1}{|\text{Det}|}$ e lo scrivo in (u,v)

$$\frac{1}{|\text{Det}|} = \frac{1}{2} \frac{x}{y} = \frac{1}{2u} \quad (\text{stesso risultato di prima, solo con procedura più semplice})$$

— o — o —

Perché funziona la procedura? Brutalmente

- basta dimostrare il risultato nel caso in cui l'integranda $f(x,y)$ è la funzione caratt. di un rettangolo.
- facciamo finta che la trasformazione sia affine: allora la trasformata di f diventa la caratteristica del trasf. del rettangolo, che è un parallelogrammo. L'area del parallelogrammo è proprio il determinante.
- Ogni trasformazione, anche non affine, per Taylor è "affine i piccolo", quindi rettangoli piccoli vanno in parallelogrammi piccoli

