

Integrali doppi in coord. polari

$$x = \rho \cos \theta$$

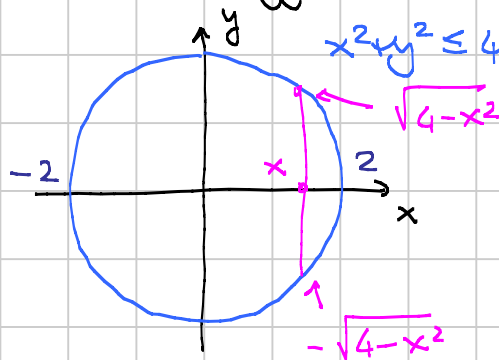
$$y = \rho \sin \theta$$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

integrale da calcolare
 Descrizione di A in coord. polari
 pagamento

Esempio 1 $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$

A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2



10 modo Normale risp. asse x

$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy (x^2 + y^2)$$

$$= \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]$$

= resta roba piena di radici

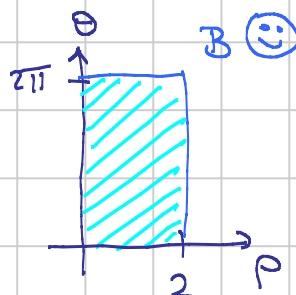
2° modo | Uso coord. polari

In coord. polari ℓ' insieme diventa

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta$$

$\underbrace{\int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{A descritto in} \\ \text{coord. polari}}} \quad \underbrace{p^2}_\substack{\uparrow \\ x^2 + y^2 \text{ in} \\ \text{coord. polari}} \quad \underbrace{p}_{\substack{\uparrow \\ \text{argomento}}} \approx \text{argomento}$



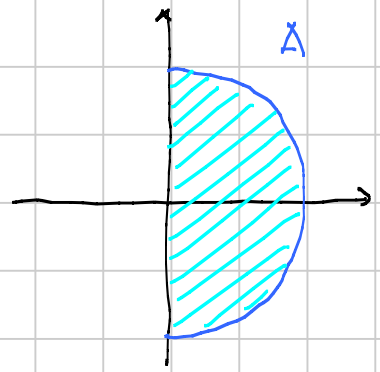
$$= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 8\pi.$$

Esempio 2 $\iint_A x^2 dx dy$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

In coord. polari A diventa

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



Non pensare nemmeno a $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$!!!

Alternativa sensata $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 dx dy &= \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta}_{x^2} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{pag.}} \\ &= \int_0^1 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Oss. Gli integrali di $\cos^2 \theta$ e $\sin^2 \theta$ tra estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ sono uguali a metà della lunghezza dell'intervallo.

$$C := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \quad S := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$$

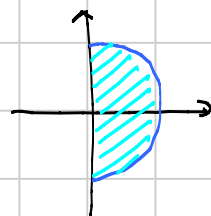
Osservo che $C = S$ per simmetria e $C + S = \frac{\pi}{2}$ per trigonometria. La situazione è la stessa con estremi $k\frac{\pi}{2}$ e $Q\frac{\pi}{2}$ ($k, Q \in \mathbb{Z}$)

Discorso simile vale per integrali $\int_{k\frac{\pi}{2}}^{Q\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta, \int_{\dots}^{\dots} \cos \theta d\theta.$

Esempio 3 A come nell'esempio 2

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

$$\iint_A y \, dx \, dy$$



0
(per simmetria: positivo sopra
e altrettanto negativo sotto)

Per la simmetria occorre osservare 2 cose:

- l'integranda $f(x,y) = y$ è DISPARI nella variabile y
- l'insieme A è simmetrico rispetto alla trasf. $(x,y) \rightarrow (x,-y)$

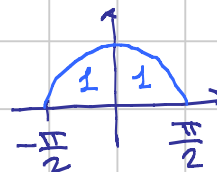
Questo basta per garantire l'integrale nullo, cosa che si vede bene lavorando come insieme normale risp. asse x :

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_a^b dx \underbrace{\int_{-g(x)}^{g(x)} f(x,y) \, dy}_{\text{integrale di funtz. dispari in } y \text{ su insieme simmetrico.}}$$

$$\iint_A x \, dx \, dy = \text{ce lo aspettiamo positivo}$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, \rho \cos\theta \cdot \rho = \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}$$



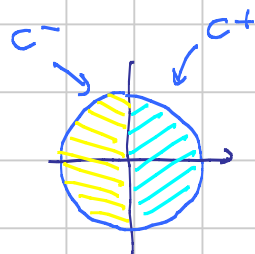
Esempio 4

$$\iint_C |x| \, dx \, dy$$

C = cerchio con centro $(0,0)$
e raggio 1

$$= \frac{4}{3} \text{ (il doppio di prima)}$$

- l'integranda è pari nella variabile x
- C è simmetrico risp. a $(x,y) \rightarrow (-x,y)$



Esempio 5

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

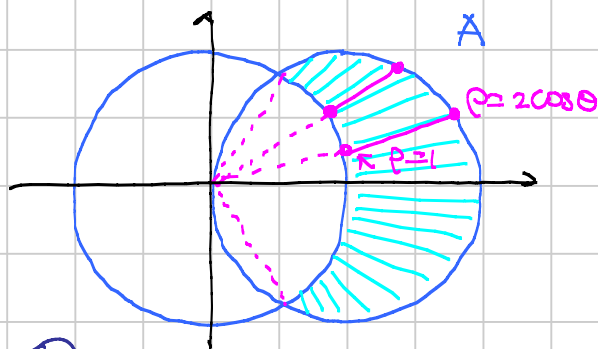
$D =$ p.ti esterni a $x^2 + y^2 = 1$ e interni al cerchio con centro in $(1,0)$ e raggio 1.

L'eq. della seconda circ. è

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x$$



1° modo Normale asse $x \rightsquigarrow$ antipatico 😞

2° modo Coord. polari $\rho \geq 1$ (fuori dal 1° cerchio)

$$\rho^2 \leq 2\rho \cos \theta$$

$$(x^2 + y^2 \leq 2x)$$

$$\rho \leq 2 \cos \theta$$

$\rightsquigarrow$

$$1 \leq \rho \leq 2 \cos \theta$$

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

$$1 = 2 \cos \theta$$

$\rightsquigarrow$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2 \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\rho$$

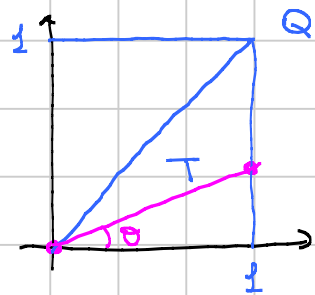
$\uparrow$
 θ deve essere esterna

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \int_1^{2 \cos \theta} \rho^2 \, d\rho = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_1^{2 \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8 \cos^4 \theta - \cos \theta) \, d\theta = \text{analisi e si fa.}$$

— o — o —

Esempio 6 Calcolare la distanza media dei pti di un $\square$ da un vertice dato.



$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

- In cartesiane, insieme $\cup$ funzione $\cap$
- In polari, insieme $\cap$ " $\cup$

Come descrivo Q in coord. polari?

Per simmetria $\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy$

ho usato che $f(x,y)$ e Q non cambiano rispetto alla trasformazione $(x,y) \rightarrow (y,x)$ (simmetria risp. bisettrice)

Scrivo T in polari: intanto $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Fissato θ ,
dove varia ρ ? $x=1 \leadsto \rho \cos \theta = 1$
 $\leadsto \rho = \frac{1}{\cos \theta}$

Quindi $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$

$$\iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho d\rho$$

ρ (pag.)
 ρ
 $\uparrow$
 $\sqrt{x^2+y^2}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-y^2)^2} dy = \text{si fa facile. } \square$$

$\uparrow$
 $y = \sin \theta$