

Funzioni integrabili ed insiemi misurabiliTeorema (Heine-Cantor in $\mathbb{R}^n$)

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in K ,

(ii) K è compatto.

Allora f è unif. cont. su K .

Dimostrazioni Stesse dell'Analisi 1 e stesse degli spazi metrici (seconda parte del corso).

Prop. Le funzioni continue sono integrabili sui rettangoli.

Dim. Sia $R := [a, b] \times [c, d]$. Sia $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Estendo f a tutto $\mathbb{R}^2$ (a zero o fuori di R). Per ogni $\varepsilon > 0$ cerco due step function.

$$\psi_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \varphi_\varepsilon(x, y)$$

tali che $\iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon(x, y) - \psi_\varepsilon(x, y)) dx dy \leq \varepsilon$.

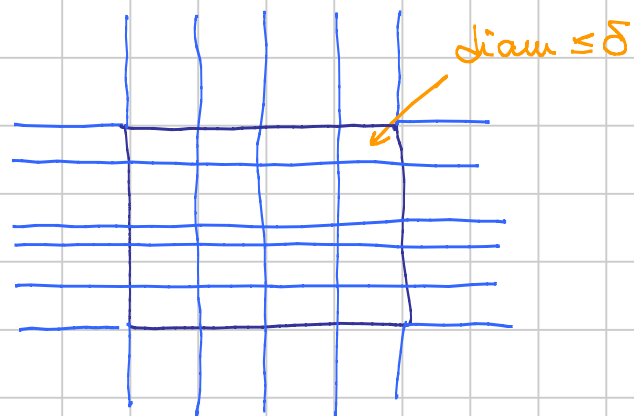
Per unif. cont. prendo il $\delta > 0$ corrispondente a $\frac{\varepsilon}{\text{Area}(R)}$

Ora considero una partizione di $\mathbb{R}^2$ che contenga i lati del rett. e abbia tutti rettangolini di diametro $\leq \delta$

$\uparrow$
max dist. tra 2 p.ti = lungh. diagonale

Definisco φ_ε e ψ_ε come 0 fuori di R , ed in ogni rettangolo interno come min / max di f sul rettangolo.

Questi esistono per W e distano meno di $\frac{\varepsilon}{\text{Area}(R)}$



perché il diam. è $\leq \delta$. Di conseguenza

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy}_{= 0} \leq \underbrace{\int_R \frac{\varepsilon}{\text{Area}(R)} dx dy}_{= 0} = \varepsilon.$$

Def. (Insiemi misurabili) Un sottoinsieme Diunitato di $\mathbb{R}^2$ si dice misurabile (secondo Riemann, o secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica è integrabile.

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ è mis. $\Leftrightarrow \varphi_A(x,y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^2$
 $\uparrow$
 1 su A , 0 fuori

Criterio di misurabilità Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se vale la seguente proprietà.

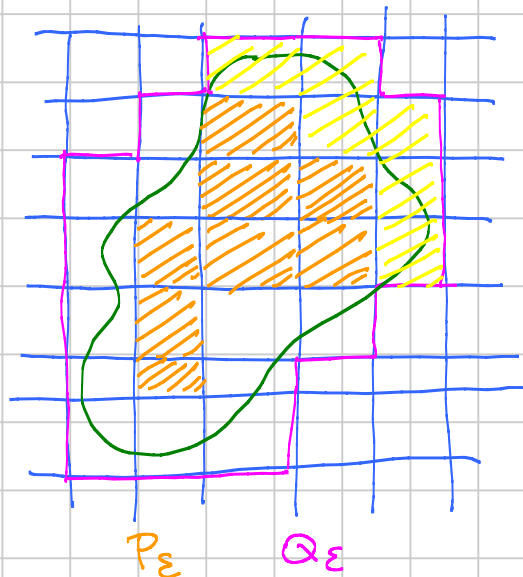
Per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due plurirettangoli (unioni finite di rettangoli senza parti interni in comune) P_ε e Q_ε t.c.

$$P_\varepsilon \subseteq A \subseteq Q_\varepsilon$$

e

$$\underbrace{\text{Area}(Q_\varepsilon) - \text{Area}(P_\varepsilon)}_{\substack{\text{Area zona compresa} \\ \text{tra } P_\varepsilon \text{ e } Q_\varepsilon}} \leq \varepsilon$$

Oss. Posso sempre pensare P_ε e Q_ε definite a partire dalle stesse rette orizz. e verticali.



Def. sostanzialmente equivalente: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se è limitato e posso ricoprire ∂A con un plurirettangolo di area $\leq \varepsilon$.

Dim. caratt. Se ho P_ε e Q_ε di uso per fare ψ_ε e φ_ε che stanno sotto sopra la caratt. di A .

Viceversa, se so che f_A è integrabile, dato $\varepsilon > 0$ prendo $\psi_\varepsilon \leq f_A \leq \varphi_\varepsilon$ con

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

e pongo $Q_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \varphi_\varepsilon(x,y) \geq 1\}$ FUORI
 $P_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \psi_\varepsilon(x,y) > 0\}$ DENTRO

Teorema Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile e compatto, e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile in A .

Dim. Essendo A misurabile, posso usare rette parallele agli assi in modo tale che la zona tra Q_ε e P_ε sia piccola a piacere.

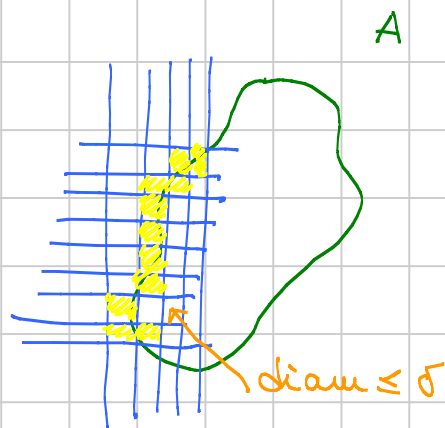
Fisso $\varepsilon > 0$. Considero la costante M tale che $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in A$ (esiste per W.).

Considero il δ dell'unif. continuità che corrisponde a

$$\frac{\varepsilon}{2 \text{ Area}(P_\varepsilon)}$$

Considero una suddivisione abbastanza fine in modo che tutti i rettangoli hanno $\text{diam} \leq \delta$ e

$$\text{Area}(Q_\varepsilon) - \text{Area}(P_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$



Ora posso

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{fuori da } Q_\varepsilon \\ \max f & \text{nei rettangoli di } P_\varepsilon \\ M & \text{nella zona tra } P_\varepsilon \text{ e } Q_\varepsilon \end{cases}$$

$$\psi_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{fuori da } Q_\varepsilon \\ \min f & \text{nei rettangoli di } P_\varepsilon \\ -M & \text{nella zona tra } P_\varepsilon \text{ e } Q_\varepsilon. \end{cases}$$

Si verifica che $\psi_\varepsilon \leq f \text{ estesa} \leq \varphi_\varepsilon$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy = \iint_{P_\varepsilon} \underbrace{(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2 \text{ Area}(P_\varepsilon)}} dx dy + \iint_{Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon} \underbrace{(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)}_{2M} dx dy$$

$2M \cdot \text{Area}(Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon)$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prop. (Misurabilità degli insiemi normali)

Sia

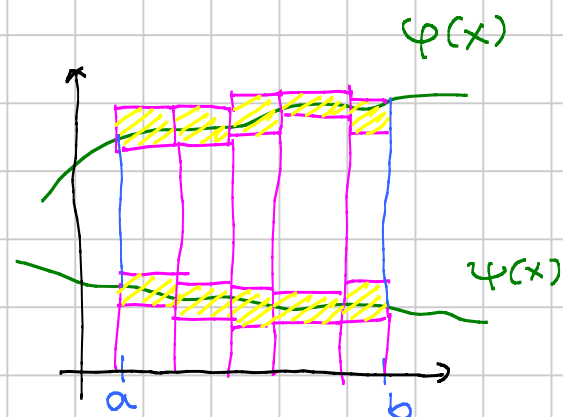
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

un insieme normale rispetto all'asse x.

Supponiamo che φ e ψ siano integrabili in $[a,b]$ (se sono continue ancora meglio).

Allora A è misurabile in $\mathbb{R}^2$.

Dim. Prendo step funct. per φ e ψ e grazie a quelle ottengo P_ε e Q_ε



Fatto

Unione ed intersezione di insiemi misurabili è ancora misurabile.

Dim.

Si potrebbe fare giocando con P_ε e Q_ε , ma forse non è così banale.

Più semplicemente

$$f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$$

$$f_{A \cup B} = \max \{f_A, f_B\}$$

Ora basta usare i teoremi sulle funzioni integrabili.

Stessa cosa si può fare per $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $A \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile.

L'estensione a 0 di f fuori di A è

$$f_A \cdot \mathbb{1}_A$$

