

Formula di spezzamento

Brutale: $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$

Teorema (Fubini, Fubini - Tonelli)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla fuori da un limitato.

Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

↑ integr. sup. su $\mathbb{R}$
↑ integrali superiori su $\mathbb{R}$
↑ integrale superiore su $\mathbb{R}^2$

Dim. **Caso banale** $f(x,y)$ = funzione caratteristica di un rettangolo

$$f_{\mathbb{R}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

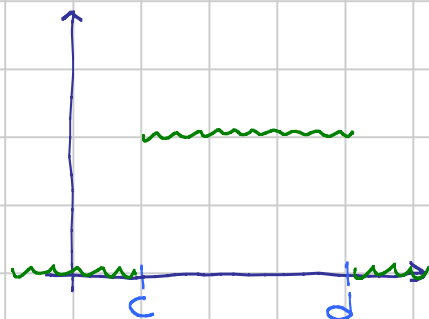
In questo caso la formula vale con tutti = e integrali veri.

È una verifica: ai lati abbiamo per def. $(d-c)(b-a)$.

Vediamo i 2 termini al centro. Fissato $x \in \mathbb{R}$, considero la "colonna"

$$y \rightarrow f(x,y)$$

Questa è $\equiv 0$ se $x \notin [a,b]$, altrimenti è come in figura



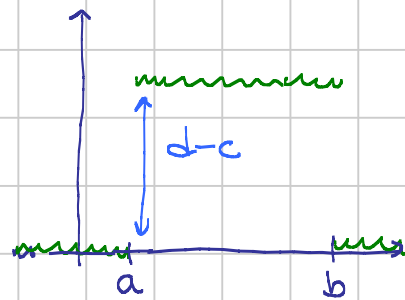
Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ (d-c) & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$

e pertanto

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \quad \text{è}$$

e quindi



$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = (b-a)(c-d).$$

Caso semibanal f è comb. lin. di caratteristiche di rettang.

Anche qui vale con tutti i = e integrali veri.

Consideriamo le 2 applicazioni

$$f \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$$

$$f \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y)$$

Sono due applic. lineari definite sullo sp. vett. delle step functions (a valori in $\mathbb{R}$) e coincidono in una base (le caratt. dei rettangoli). Quindi coincidono ovunque. 😊

Caso generale Devo dim. 3 disug. Quella centrale è quasi immediata.

Facciamo quella di dx (l'altra è simmetrica).

Sia $\varphi(x,y)$ una S.F. con

$$f(x,y) \leq \varphi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

È chiaro che

$$\int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

perché la restrizione di $\varphi(x,y)$ alle colonne (x costante) è una S.F. in una variabile $\geq$ della restrizione di f alla colonna.

Poiché è vera per ogni x , e il RHS è a sua volta una S.F. nella variabile x , integrando nuovamente ottengo

$$\int_{\mathbb{R}}^* dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy$$

↑
caso
semibianale

Facendo l'inf. del RHS al variare di φ otteniamo la disug. di dx.

— o — o —

Corollario (Fubini - Tonelli con tutti uguale)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come nel teorema.

Supponiamo che

(i) f è integrabile in $\mathbb{R}^2$

(ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$y \rightarrow f(x,y) \quad (\text{cioè la colonna})$$

è integrabile su $\mathbb{R}$.

Allora la funzione

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

è integrabile in $\mathbb{R}$ e vale la relazione che ci aspettiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy.$$

Dim. Scrivendo la formula generale abbiamo RHS = LHS, quindi sono tutti =

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy\end{aligned}$$

Questo dice che la funzione interna è integrabile su $\mathbb{R}$.

Oss. In entrambi i teoremi / corollario le ipotesi sono necessarie e le disug. possono essere strette.

Patologia 1 Esempio di funzione non integrabile su $\mathbb{R}^2$.
Dirichlet sul quadrato

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica che

$$\int_{\mathbb{R}}^* d(x,y) dx dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}}^* d(x,y) dx dy = 0.$$

Vediamo quanto vale

$$\int_{\mathbb{R}}^* d(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy d(x,y) = 1$$

Analogamente si verifica che

$$\int_{\mathbb{R}}^* dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy d(x,y)}_{=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}} = 0$$

Esercizio (hard) Fare in modo che nel teo. generale
i 4 numeri siano

$$0 < 12 < 37 < 2017$$

Patologia 2 Può succedere che $f(x, y)$ sia integrabile su $\mathbb{R}^2$, ma esistano dei valori di x per cui $y \rightarrow f(x, y)$ non è integrabile su $\mathbb{R}$.
Quindi: l'hp (ii) nel corollario serve.

Esempio: Dirichlet su una colonna e basta.

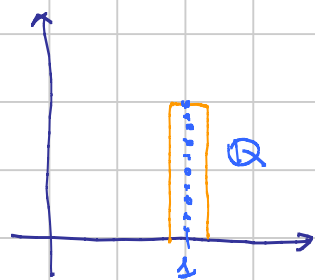
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=1 \text{ e } y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La colonna sopra $x=1$ non è integrabile.

Tuttavia, la funzione è integrabile su $\mathbb{R}^2$ con integrale nullo.

Come S.F. dal basso uso quella $\equiv 0$.

Come S.F. dall'alto uso la caratteristica di $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \times [0, 1]$,
il cui integrale è 2ε .



Patologia 3 Può succedere che i 2 termini centrali nel teorema generale coincidano, e contengano solo integrali veri, eppure la $f(x, y)$ non è integrabile su $\mathbb{R}^2$. Possono coincidere anche nei 2 tipi di spezzamento (dx esterna o interna).

Lemma Esiste un sottoinsieme $D \subseteq [0, 1]^2$ denso che interseca al più una volta ogni retta orizzontale e ogni retta verticale.

Dato il denso D del Lemma, la sua funzione caratteristica verifica la patologia 3 (viene tutto o a tappeto)

Dim. Lemma Consideriamo tutti i cerchi con centro su un pto di $[0, 1]^2$ a coord. razionali e raggio razionale.

Fatto 1 Se D ha almeno 1 pto in ognuno dei cerchi, allora è denso. (quei cerchi sono una base per la topologia)

Fatto 2 Quei cerchi sono numerabili, cioè li posso "listare" come

$C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$
con indici naturali.

Fatto 3 Ora vado per induzione. Prendo a caso $d_1 \in C_1$, poi prendo a caso $d_2 \in C_2$ evitando le 2 rette // agli assi che passano per d_1 , poi prendo $d_3 \in C_3$ a caso evitando le 2 rette per d_1 e le due rette per d_2 , e così via.

— o — o —