

4 Tecniche di calcolo Gli integrali doppi si calcolano con la

FORMULA DI RIDUZIONE

Sotto opportune ipotesi vale che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$2 = 1 + 1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$$

Idea: per calcolare un integrale doppio, basta calcolare due integrali "singoli".

Oss. Questa formula è una specie di DOUBLE COUNTING

$r_1 \leftarrow$	$k_{1,1}$	$k_{1,2}$	$k_{1,3}$	
$r_2 \leftarrow$			$k_{2,3}$	
$r_3 \leftarrow$				
	c_1	c_2	c_3	$c_{..}$

Calcolare un integrale doppio è come sommare tutti i numeri della tabella

Fare $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$ vuol dire sommare prima "column-wise" e poi sommare i vari risultati
 $= c_1 + c_2 + \dots$

$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$ vuol dire somma prima "riga-wise" e poi fare $r_1 + r_2 + \dots$

— o — o —

Formula di riduzione sui rettangoli

Supponiamo $R := [a, b] \times [c, d]$ e $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
Allora

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy\end{aligned}$$

Più brevemente si scrive

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [2, 3]$ $f(x, y) = xy^2$

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

1° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 xy^2$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=2}^{y=3}$$

↑ primitiva risp. ad y

$$= \int_0^1 dx \left(9x - \frac{8}{3}x \right) = \frac{19}{3} \int_0^1 x dx = \frac{19}{6}$$

2° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 dx xy^2$

$$= \int_2^3 dy \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \int_2^3 \frac{1}{2} y^2 dy = \left[\frac{1}{6} y^3 \right]_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{8}{6} = \frac{19}{6}$$



Oss. Quando integro risp. ad y & x a moltiplicare
"possono uscire fuori"

$$\int_0^1 dx \int_2^3 dy \quad \textcircled{\times} y^2 = \int_0^1 x dx \int_2^3 y^2 dy = \int_0^1 x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_2^3 \\ = \frac{19}{3} \int_0^1 x dx = \frac{19}{6}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $A := [-1, 1] \times [0, 2]$ $f(x, y) = 2x + 3y$

1° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy (2x + 3y)$

$$= \int_{-1}^1 dx \left[2xy + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \int_{-1}^1 dx [4x + 6]$$

$$= [2x^2 + 6x]_{x=-1}^{x=1} = 2 + 6 - 2 - (-6) = 12$$

2° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dx (2x + 3y)$

$$= \int_0^2 dy [x^2 + 3xy]_{x=-1}^{x=1} = \int_0^2 6y dy = [3y^2]_{y=0}^{y=2} = 12 \quad \textcircled{\text{smile}}$$

3° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = 2 \iint_A x dx dy + 3 \iint_A y dx dy$

$$\iint_A x dx dy = \int_0^2 dy \underbrace{\int_{-1}^1 dx x}_{=0} = 0$$

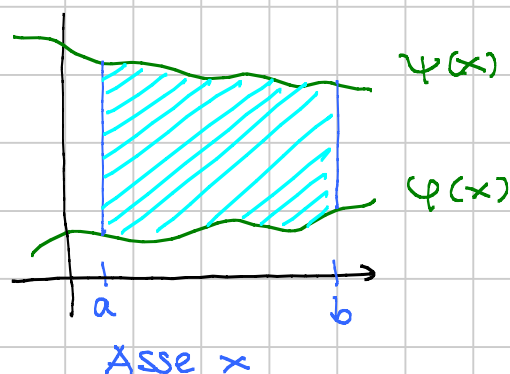
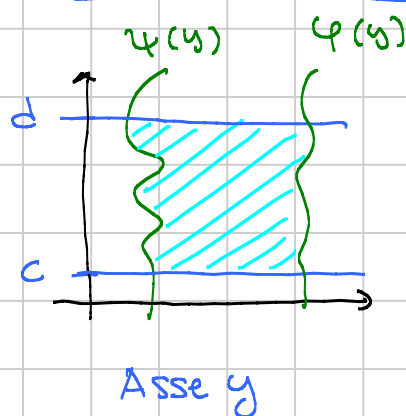
$$\iint_A y dx dy = \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dx \quad \textcircled{y} = \int_0^2 y dy \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_{\text{lungh. interv.}} = 2 \int_0^2 y dy = \dots$$

Formula di riduzione sugli insiemi normali

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

- normale rispetto all'asse x se è del tipo

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$



- normale rispetto all'asse y se è del tipo

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Formula di spezzamento

$$\text{Asse } x \rightsquigarrow \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

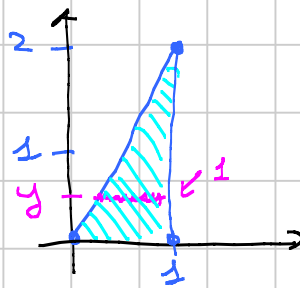
$$\text{Asse } y \rightsquigarrow \iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

— o — o —

Oss. Lo stesso insieme A può essere normale nelle due direzioni.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 y$

A = triangolo con vertici in
 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$



$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \, x^2 y = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2x} y \, dy \\ &= \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} = \int_0^1 2x^4 dx = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Alternativa: scrivo A come normale rispetto all'asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_A x^2 y \, dx \, dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \, x^2 y = \int_0^2 y \, dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 x^2 dx$$

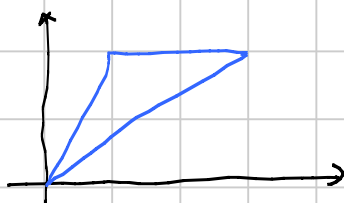
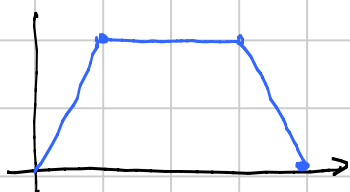
$$= \int_0^2 y \, dy \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} = \int_0^2 y \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} y^3 \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} y - \frac{1}{24} y^4 \right) dy = \left[\frac{1}{6} y^2 - \frac{1}{120} y^5 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3} - \frac{32}{120}$$

$$= \frac{80-32}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

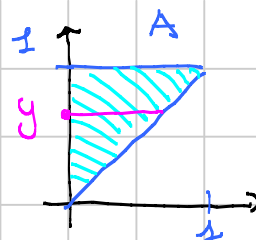


Oss. Normale rispetto asse y può essere comodo!



Esempio 4

$$\iint_A e^{y^2} dx dy$$



1° modo Normale asse x

$$\iint_A e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{y^2} \quad \text{non so fare la primitiva 😞}$$

2° modo Normale asse y

$$A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq y \}$$

$$\iint_A e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{y^2} = \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^y dx$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2} dy = \text{😊}$$

1° modo, tenendo d'occhio

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{y^2} = \int_0^1 dx \left[F(y) \right]_{y=x}^{y=1}$$

↑
primitiva

$$= \int_0^1 [F(1) - F(x)] dx = F(1) - \int_0^1 1 \cdot F(x) dx$$

per parti!

$$= F(1) - \left\{ [x F(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x e^{x^2} dx \right\}$$

↑ ↑
si cancellano F'(x)

— 0 — 0 —