

Integrali doppi

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Definizione (i)
- ④ Tecniche di calcolo

1 Notazioni

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

(Anno) simbolo doppio di integrale
 (Anno) zona di integrazione
 (Anno) integranda
 (Anno) variabili di integrazione

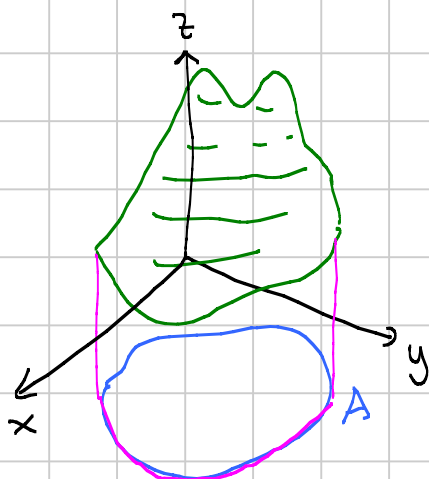
Sottinteso quando si parla di integrali propri

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è s. insieme limitato ($\exists R > 0$ t.c. $|x| \leq R \quad \forall x \in A$)
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata ($\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$)

2 Significato geometrico Se $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$ allora

$\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume della parte di spazio compresa tra piano base xy e grafico di f

$$= \text{Volume} (\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y) \})$$



Se $f(x,y)$ ha segno variabile in A , allora i volumi sopra piano xy contano con il segno +, quelli sotto con il segno - (somma algebrica)

[3] Definizioni → DARBOUX "unrestricted" (facciamo questa)
→ " ortodossa
→ Riemann

Data f limitata su A limitato, la estendiamo a tutto $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

e poniamo

$$\iint_A f(x,y) dx dy := \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y) dx dy$$

D'ora in poi ci basta definire l'integrale su $\mathbb{R}^2$ per funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che sono

- limitate
- nulle fuori da un insieme limitato.

Caso banale] Sia $R := [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo (con lati paralleli agli assi) e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$f(x,y) := \begin{cases} \lambda & \text{se } (x,y) \in R \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin R \end{cases}$$

In questo caso poniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\text{area di } R \\ \uparrow \\ \text{altezza con segno}}} = \text{volume parallelepipedo}$$

Indichiamo con $\lambda \varphi_R(x,y)$ questa speciale funzione

Caso semi-banale

f è una step-function, cioè una comb. lineare di funzioni del tipo precedente, diciamo

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{R_i}(x,y)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono reali e $R_i := [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

(Il grafico di $f(x,y)$ è una unione di parallelepipedi).

In questo caso poniamo

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &:= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - a_i)(d_i - c_i) \end{aligned}$$

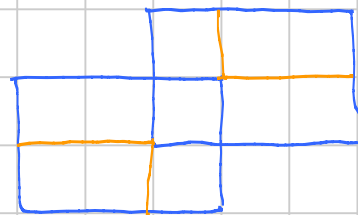
Fatto (ovvio intuitivamente, ma andrebbe dimostrato)

Se la stessa funzione si scrive in due modi diversi come comb. lin. di caratteristiche, allora l'integrale definito nei 2 modi è lo stesso.

Oss. Per evitare sovrapposizioni su pezzi comuni di bordo, sarebbe forse meglio considerare intervalli semiaperti
 $R = [a, b) \times [c, d)$

Fatto (ovvio come sopra)

Ogni step function si possa pensare come comb. lin. di rettangoli senza parti interne in comune



Caso generale f qualunque (purché soddisfi le ipotesi)

Si definiscono l'integrale inferiore e superiore

$$I^+(f, \mathbb{R}^2) := \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dx dy : \varphi \text{ è una step funct.} \right. \\ \left. \text{e } \varphi(x, y) \geq f(x, y) \right. \\ \left. \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$I^-(f, \mathbb{R}^2) := \sup \left\{ \dots \varphi(x, y) \leq f(x, y) \dots \right\}$$

Oss. $I^+(f, \mathbb{R}^2)$ e $I^-(f, \mathbb{R}^2)$ esistono sempre (qui serve che esiste almeno una step function $\geq f$ e almeno una $\leq f$) e vale la relazione

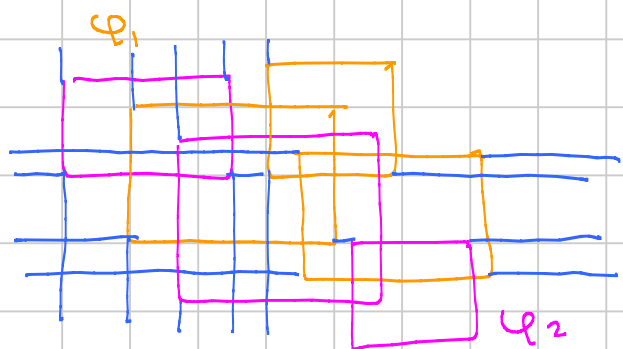
$$I^-(f, \mathbb{R}^2) \leq I^+(f, \mathbb{R}^2)$$

Lemma (ovvio unica tanto come il resto) Se φ_1 e φ_2 sono due step functions tali che

$$\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

allora
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_2(x, y) dx dy.$$

Dim. Diventa davvero ovvio se mostro che φ_1 e φ_2 si possono pensare definite a partire dallo stesso insieme di rettangoli (cosa vera, ma andrebbe dim.)



(Si tratta di tirare tutte le possibili rette orizz. o vert. che contengono almeno un lato)

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le ipotesi si dice integrabile (secondo D. unstricted) se

$$I^-(f, \mathbb{R}^2) = I^+(f, \mathbb{R}^2).$$

Prop. (Criterio di integrabilità) f è integrabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due step functions φ e ψ , definite a partire dalla stessa partizione, tali che

$$\varphi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\psi(x, y) - \varphi(x, y)| dx dy \leq \varepsilon.$$

Dim. Stessa di Analisi 1.

— o — o —

Proprietà analoghe ad Analisi 1

① Linearità L'insieme delle funz. int. è uno sp. vett. e l'integrale è un'applic. lineare

② Monotonia Se f e g sono int., e $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy$$

③ Continuità Se f è integr., allora $|f|$ è integr. e

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy$$

④ Prodotto Se f e g sono integrabili, allora anche $f \cdot g$ è integrabile.

(Si fa separando parte pos. e parte neg.)

⑤ Additività rispetto alla zona di integrazione

Se $A \cap B = \emptyset$, allora

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_B f(x, y) dx dy$$

ovviamente se f è integrabile su A e su B

(Questo diventa conseguenza del teorema della somma nel momento in cui si estende tutto ad $\mathbb{R}^2$)

Oss. finale Quando vado a definire $\iint_A f(x, y) dx dy$ estendendolo ed approx con le step function, quest'attime per stare sopra / sotto f devono anche "sfiorare su ∂A " e non solo in altezza
(pensare al caso della caratteristica di un cerchio)

— o — o —