

Esercizio 1 Trovare i p.ti stazionari della funzione

$$f(x,y) = e^x \sin(xy)$$

e classificarli (capire se sono max/min locali o altro)

ROAD MAP

→ $\nabla f(x) = 0$ per trovarli

→ per classificarli se va bene funziona Hf
(cioè ha autov. non nulli)

→ altrimenti sono guai e si può provare con Taylor.

$$f_x = e^x \sin(xy) + e^x \cos(xy) \cdot y = 0$$

$$f_y = e^x \cos(xy) \cdot x = 0$$

2^a equ. $\nearrow \cos(xy) = 0 \leadsto \sin(xy) = \pm 1 \leadsto 1^a \text{ equ. no}$

$\searrow x = 0 \leadsto$ Dalla 1^a equ. trovo $y = 0$.

L'unico p.to stazionario è $(0,0)$. Per classificarlo posso

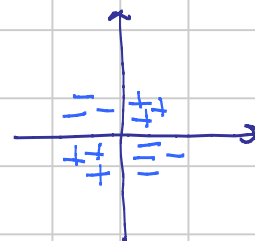
• fare Hf (farlo!)

• studiare il segno in un intorno di $(0,0)$
 $\leadsto$ sella

• Taylor in $(0,0)$:

$$f(x,y) = xy + o(x^2 + y^2)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



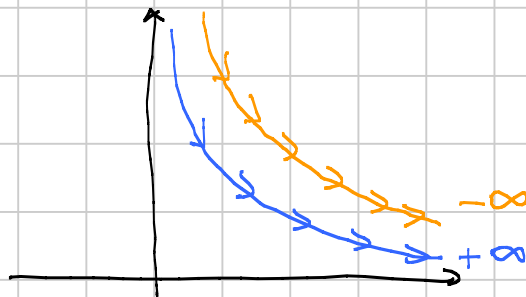
$\leadsto$ è come fosse xy , quindi sella

Esercizio 2

inf / sup su $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y) = e^x \sin(xy)$

♂ $f(t, \frac{\pi}{2} \frac{1}{t}) = e^t$ per $t \rightarrow +\infty$ ottengo $\sup = +\infty$

♀ $f(t, \frac{3\pi}{2} \frac{1}{t}) = -e^t$ per $t \rightarrow +\infty$ ottengo $\inf = -\infty$



Esercizio 3 Calcolare e classificare i p.ti stat. di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 4y = 0 && \leadsto y = x^3 && \leadsto \text{nella 2}^a: x^3 = x \\ f_y &= 4y^3 - 4x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \swarrow \\ x=0 & x=\pm 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ y=0 & y=\pm 1 \end{array}$$

Ci sono 3 p.ti stazionari $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Posso calcolare l'Hf nei 3 p.ti e viene...

In alternativa

• $(0,0)$ è una sella per Taylor $f(x,y) = -4xy + o(x^2+y^2)$

• Si vede che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$. Quindi per W.gen.

$f(x,y)$ ammette MIN in $\mathbb{R}^2$, quindi almeno un p.to di min. ci deve essere, e si trova tra gli stat.

Poiché $f(1,1) = f(-1,-1)$, sono entrambi p.ti di min.

Per il limite, il miglior modo sono le coord. polari

$$x^4 + y^4 - 4xy = \rho^4 (\underbrace{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}_{\geq m > 0}) - 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\geq m \rho^4 - 4\rho^2 \rightarrow +\infty$$

— 0 — 0 —

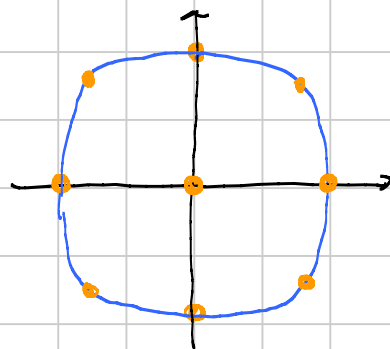
Achtung! Se $f(x,y)$ ha $\inf -\infty$ e $\sup +\infty$ su $\mathbb{R}^2$ e ha un solo p.to staz., posso dire qualcosa del p.to stazionario?

NO!!! (Trovare esempi!!!)

— 0 — 0 —

Esercizio 4 Trovare

$$\max / \min \left\{ \underbrace{\cos x + \cos y}_{f(x,y)} : \underbrace{x^4 + y^4 \leq 1}_{g(x,y)} \right\}$$



• Esistono per W.

• Non ci sono sing. interni

• Staz. interni

$$f_x = 0 \quad -\sin x = 0 \quad \leadsto \text{unica sol. } (0,0)$$

$$f_y = 0 \quad -\sin y = 0 \quad (\text{perché } x \text{ e } y \text{ stanno } [-1,1])$$

Vediamo subito che $(0,0)$ è p.to di max.

• Lavoro con i moltiplicatori

→ 1° sistema $\leadsto$ NO SOL. (fare!)

→ 2° sistema

$$\begin{cases} -\sin x = 4\lambda x^3 \\ -\sin y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Se $x=0$ trovo $(0, \pm 1)$

Se $y=0$ trovo $(\pm 1, 0)$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ posso dividere e trovo

$$-4\lambda = \frac{\sin x}{x^3} = \frac{\sin y}{y^3}$$

Da questa vorrei dedurre che $x=y$. Posso? Quasi $x = \pm y$
Mi riduco a studiare l'injectività di

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t^3}$$

I t che ci interessano sono
quelli in $(0, 1]$, e lì c'è speranza



$$\varphi'(t) = \frac{\cos t \cdot t^3 - 3t^2 \sin t}{t^6} = \frac{t \cos t - 3 \sin t}{t^4}$$

studio il
numeratore

$$\psi(t) = t \cos t - 3 \sin t$$

$$\psi'(t) = \cos t - t \sin t - 3 \cos t = -2 \cos t - t \sin t \leq 0$$

almeno fino a $\frac{\pi}{2}$

visto che $\psi(0) = 0$, abbiamo $\psi(t) \leq 0$ " " " " ☺

Quindi per il univ. abbiamo 8 candidati
— 0 — 0 —

Esercizio 5 (Metodo delle succ. per fare limiti)

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - xyz$$

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in (1, 2), 0 < x < z\}$$

$$\lim_{\substack{|(x, y, z)| \rightarrow +\infty \\ (x, y, z) \in D}} f(x, y, z)$$

$$f(t, \frac{3}{2}, 2t) = t^2 + \frac{9}{4} + 4t^2 - 3t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \limsup = +\infty$$

Forziamo le regole $y \in [1, 2]$, $0 \leq x \leq z$

Per $y=2$ diventa

$$x^2 + 4 + z^2 - 2xz = (x-z)^2 + 4$$

$$f(t, 2, t) = 4 \rightsquigarrow \liminf \leq 4$$

$$f(t, 2 - \frac{1}{t^2}, t + \frac{1}{t^2}) = \dots \text{ forse qualcosa che per } t \rightarrow +\infty \text{ tende a } 4.$$

Da qui sappiamo solo che $\liminf \leq 4$.

Voglio dimostrare che è 4.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - xyz \geq x^2 + y^2 + z^2 - 2xz \\ &= \underbrace{(x-z)^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 1} \end{aligned}$$

Discutere i casi a seconda di y non va bene, perché è come fare i limiti sulle rette/piani.

Sia (x_n, y_n, z_n) una successione che realizza il $\liminf$ (esiste per i soliti motivi)

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n y_n z_n = (x_n - z_n)^2 + y_n^2 + (2 - y_n) x_n z_n$$

A meno di sottosucc., posso supporre che

- $y_n \rightarrow \ell \in [1, 2]$
- $x_n z_n \rightarrow m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Ora posso distinguere i casi

• Se $l=2$, allora $f(x_n, y_n, z_n) \geq y_n^2 \rightarrow 4$, quindi ok

• Se $l < 2$ e $m = +\infty$, allora $f(x_n, y_n, z_n) \geq \underset{\substack{\downarrow \\ (2-l)}}{(2-y_n)} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x_n z_n} \rightarrow +\infty$

• Se $l < 2$ e $m < +\infty$, allora

$$f(x_n, y_n, z_n) \geq (x_n - z_n)^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x_n^2 + z_n^2} - \underset{\substack{\downarrow \\ -2m}}{2x_n z_n} \rightarrow +\infty.$$

Fatto generale : ogni succ. ha una s.succ. che ha limite in $\bar{\mathbb{R}}$.

— o — o —