

QUOZIENTE DI RAYLEIGH

(caratterizzazione variazionale di autovalori / autovettori)

Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica. Consideriamo la funzione

$$R(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Prop. $R(x)$ ammette max/min in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e questi sono il max/min autovalore di A . I pti di max/min sono i relativi autospazi.

Dtm. Osserviamo che $R(x)$ è una funzione 0-omogenea, cioè

$$R(\lambda x) = \frac{\langle A(\lambda x), \lambda x \rangle}{|\lambda x|^2} = \frac{\lambda^2 \langle Ax, x \rangle}{\lambda^2 |x|^2} = R(x)$$

per ogni $\lambda > 0$ (anche per ogni $\lambda \neq 0$).

Quindi

$$\inf / \sup \text{ di } R(x) \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} =$$

$$\inf / \sup \text{ di } R(x) \text{ su } |x| = 1 \leadsto \text{pt. quindi sono max/min.}$$

Applichiamo il metodo dei moltiplicatore con

$$g(x) = |x|^2 - 1$$

Poniamo $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ e quindi risolviamo

$$\max / \min \{ f(x) : g(x) = 0 \}$$

Ricordiamo che

$$\nabla f(x) = 2Ax$$

$$\nabla g(x) = 2x$$

(in generale viene

$$\nabla f(x) = (A + A^t)x$$

1° sistema

$$\nabla g(x) = 0$$

$$g(x) = 0 \leadsto \text{non ha soluz.}$$

2° sistema

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$

$$2Ax = 2\lambda x$$

$$g(x) = 0$$

$$|x|^2 = 1$$

La prima equ. dice che x è autovettore di A .

I candidati sono gli autovettori di norma 1. Sostituendo

in f si trova $f(x) = \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle \lambda x, x \rangle}_{=0} = \lambda \underbrace{|x|^2}_{=1} = \lambda$

Oss. Questo ci dice che esistono almeno 2 autovettori lin. indep.

Esercizio (dimostrare il teorema spettrale)

Passo 1 Risolvo il problema

$$\min \{ \langle Ax, x \rangle : |x|^2 = 1 \}$$

Per la prop. precedente sappiamo che il minimo esiste ed è un autovalore, e il corrispondente p.to di min. è un autovettore v_1 .

Passo 2 Risolvo il problema

$$\min \{ \langle Ax, x \rangle : |x|^2 = 1, \langle x, v_1 \rangle = 0 \}$$

L'esistenza è gratis per w . I p.ti di min. vengono fuori dal metodo dei moltiplicatori con 2 vincoli

$$g(x) = |x|^2 - 1 = 0$$

$$g_1(x) = \langle x, v_1 \rangle = 0$$

Imposto i 2 sistemi, osservo che il 1° non ha soluzione (falso!) e quindi i pti di min. risolvono il 2° sistema

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x)$$

$$2Ax = 2\lambda x + \lambda_1 v_1$$

Se λ_1 fosse $= 0$, saprei che x è un nuovo autovettore di A .
Moltiplico l'equazione scalarmente per v_1 :

$$\underbrace{\langle 2Ax, v_1 \rangle}_0 = 2\lambda \underbrace{\langle x, v_1 \rangle}_0 + \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_1$$

eq. $g_1(x) = 0$

$$\langle 2Ax, v_1 \rangle = 2 \langle Ax, v_1 \rangle = 2 \langle x, Av_1 \rangle = 2 \langle x, \mu v_1 \rangle = 0$$

Questo mostra che $\lambda_1 = 0$ e quindi il p.to di min. è un altro autovettore v_2 di A ortogonale al precedente.

Passo 3 Risolvo

$$\min \{ \langle Ax, x \rangle : |x|^2 = 1, \langle x, v_1 \rangle = \langle x, v_2 \rangle = 0 \}$$

e allo stesso modo trovo un nuovo autovettore v_3 ortogonale ai 2 precedenti. E così via per involuzione.

— 0 — 0 —

Oss. Se $\varphi(x) := \langle v, x \rangle$, allora $\nabla \varphi(x) = v \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dim. $\varphi(x+r) = \langle v, x+r \rangle = \langle v, x \rangle + \langle v, r \rangle$
 $= \varphi(x) + \langle v, r \rangle$

↑
 $\nabla \varphi(x)$

— 0 — 0 —

Equazione delle onde

Esercizio preparatorio

Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che

$$f_{xy}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Risposta: sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

Dici Per vedere che sono le uniche occorre un sottoesercizio.

Tutte le $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g_y = 0$ sono del tipo
 $g(x,y) = \hat{\varphi}(x)$

$$g(x,y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange} \\ \text{Direzionale}}}{g(x,0)} + g_y(x,0)y = g(x,0) =: \hat{\varphi}(x)$$

Sappiamo che $(f_x)_y = 0$, quindi $f_x(x,y) = \hat{\varphi}(x)$
e ora usiamo nuovamente Lagrange direzionale.

Potiamo

$\varphi(x)$ = qualunque primitiva di $\hat{\varphi}(x)$
e osserviamo che

$$f(x,y) - \varphi(x) = u(x,y)$$

risolve

$$u_x(x,y) = f_x(x,y) - \hat{\varphi}(x) = 0$$

quindi

$$u(x,y) = \psi(y)$$

e quindi $f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Equazione delle onde

Trovare tutte le $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$u_{xx}(x,y) = u_{yy}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Pongo

$$\xi := x+y$$

$$\eta := x-y$$

→

in realtà uso

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta$$

corretto dopo video

e considero

$$v(\xi, \eta) = u(\xi + \eta, \xi - \eta).$$

Calcoliamo le derivate di v

$$v_{\xi}(\xi, \eta) = u_x(\xi + \eta, \xi - \eta) + u_y(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$v_{\eta}(\xi, \eta) = u_x(\xi + \eta, \xi - \eta) - u_y(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = u_{xx}(\dots) + u_{xy}(\dots)(-1) + u_{yx}(\dots) + u_{yy}(\dots)(-1)$$

$$= u_{xx}(\xi + \eta, \xi - \eta) - u_{yy}(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$= 0 \quad (\text{per l'eq. delle onde})$$

Quindi per l'esercizio preparatorio sappiamo che

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

"

$$u(\overset{x}{\xi + \eta}, \overset{y}{\xi - \eta})$$

Ricavo ξ e η in funzione di x ed y

$$\xi := \frac{x+y}{2}$$

$$\eta := \frac{x-y}{2}$$

da cui

$$u(x,y) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Conclusione: tutte le soluzioni dell'equazione

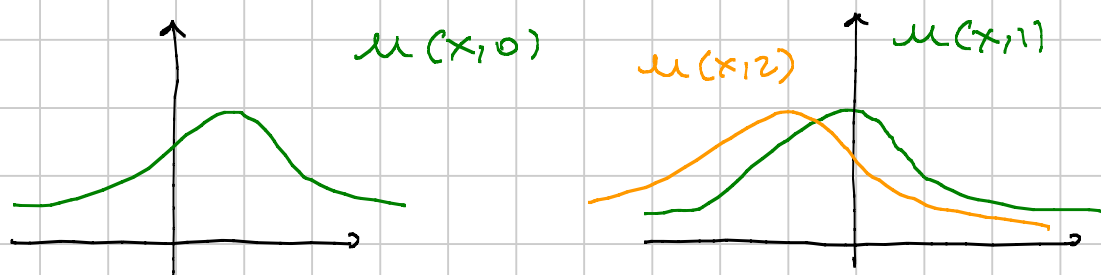
$$u_{xx} = u_{yy}$$

sono del tipo

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$$

Come sono fatte le funzioni del tipo $f(x+y)$?

Le sue sezioni a y fisso sono un profilo che trasla verso sinistra



Le funzioni del tipo $u(x,y) = f(x+y)$ sono TRAVELING WAVES che vanno a sinistra

Le funzioni del tipo $u(x,y) = g(x-y)$ sono traveling waves verso dx.

Morale: ogni soluz. dell'eq. delle onde è la somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta.

Esercizio

Risolvere

$$u_{yy} = c^2 u_{xx}$$

— o — o —