

Esercizio 1 Dimostrare il teo. fondamentale dell'algebra.

Cosa ci aspettiamo di dover usare?

- Qualcosa che riguarda i reali, tipo assioma di continuità.
- Qualcosa della struttura algebrica di $\mathbb{C}$.

Consideriamo un polinomio

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Voglio dim. che esiste $z_0 \in \mathbb{C}$
t.c. $p(z_0) = 0$.

Penso $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$ e definisco

$$f(x, y) := |p(x + iy)|$$

Il teo. è ridotto a dimostrare che $\min \{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = 0$.

Passo 1 Dimostriamo che il minimo esiste. È chiaro che f è continua. Per Weierstrass generalizzato basta far vedere che

$$\lim_{\substack{x+iy \rightarrow \infty \\ |z|^2}} f(x, y) = +\infty$$

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

Quindi

$$|p(z)| = \overbrace{|z|^n}^{+\infty} \cdot \overbrace{\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|}^{|a_n| \neq 0}$$

Osservo che $\frac{|a_{n-1}|}{|z|} \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow +\infty$

$$\frac{|a_{n-k}|}{|z|^k} \rightarrow 0 \text{ per } |z| \rightarrow +\infty \text{ se } k \geq 1$$

(Ho usato che il termine di grado + alto domina)

Oss. Questo passo della dim. è costruttivo, cioè si può esibire esplicitamente, in funzione dei coeff. e di M , un raggio R tale che

$$|p(z)| \geq M \quad \forall z \text{ con } |z| \geq R.$$

(basta fare in modo che $\frac{|a_{n-k}|}{|z|^k}$ siano $\leq \frac{a_n}{2^n}$)

Passo 2 Ora sappiamo che $|p(z)|$ ha minimo per un certo z_0 .

Posso supporre WLOG che $z_0 = 0$, altrimenti considero il polinomio $q(z) = p(z - z_0)$.

Resta quindi da dimostrare che $p(0) = 0$.

Supponiamo che non sia così. Allora

$$p(z) = a_0 + \underbrace{a_k}_{\neq 0} z^k + \text{termini di grado + alto}$$

Dimostro che spostandomi in una direzione opportuna $|p(z)|$ scende. Considero

$$p(tw) = a_0 + a_k w^k t^k + o(t^k)$$

Idea: fare in modo che $a_k w^k = -a_0$

Posso, perché basta scegliere come w una radice k -esima di $-\frac{a_0}{a_k}$ (momento algebrico: esistenza della radice k -esima si dim. con formula trigonometrica)

Otteniamo

$$p(tw) = a_0 - a_0 t^k + o(t^k)$$
$$= a_0 (1 - t^k) + o(t^k)$$

da cui

$$|p(tw)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triang.}}}{|a_0| (1 - t^k)} + o(t^k) < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vero per} \\ t \text{ piccolo.}}}{|a_0|}$$

(Nell'ultimo passaggio ho usato che $a_0 \neq 0$).

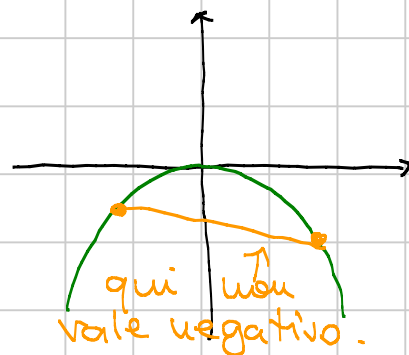
Esercizio 2 La funzione $f(x, y) = y + x^2$ è convessa in $\mathbb{R}^2$?

$$f_x = +2x \quad f_y = 1 \quad f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 0 \quad f_{xy} = 0$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{e questo basta per concludere}$$

La funzione $g(x, y) = |y + x^2|$ NON è convessa in $\mathbb{R}^2$

L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ è la parabola $y = -x^2$ e quindi non è un insieme convesso.

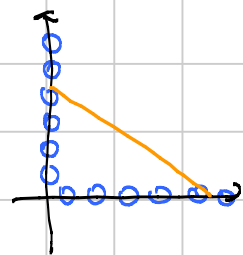


Esercizio 3 (Praticamente sbagliato in AM2-16)

Consideriamo $f(x,y) = x^a y^b$ definita per $x \geq 0, y \geq 0$ con a e b esponenti positivi.

• Quando è convessa? MAI

Si annulla sugli assi, e altrove è positiva



• Quando è concava? Impongo $Hf \leq 0$.

$$f_x = a x^{a-1} y^b$$

$$f_y = b x^a y^{b-1}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

$$Hf \leq 0 \Leftrightarrow \text{tizi sulla diag} \leq 0 \quad \text{Det} \geq 0$$

$$a(a-1) \leq 0$$

$$a \in [0,1]$$

$$b(b-1) \leq 0$$

$$b \in [0,1]$$

$$\text{Det} = [a(a-1)b(b-1) - a^2b^2] x^{2a-2} y^{2b-2}$$

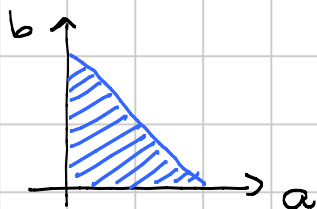
$$a(a-1)b(b-1) - a^2b^2 \geq 0$$

$$(a^2-a)(b^2-b) - a^2b^2 \geq 0$$

$$\cancel{a^2b^2} - a^2b - ab^2 + ab - \cancel{a^2b^2} \geq 0$$

$$ab(1-a-b) \geq 0$$

Conclusione: f è concava $\Leftrightarrow a \in [0,1], b \in [0,1], a+b \leq 1$



Esempio 4 (Sbagliato in AM2_16)

$$f(x, y) = \log(1+x^2+y^2)$$

Dove è convessa?

Più in generale, trattiamo $f(x, y) = g(x^2+y^2)$

$$f_x = 2x g'(x^2+y^2) \quad f_y = 2y g'(x^2+y^2)$$

$$Hf(x, y) = 2 \begin{pmatrix} g'(x^2+y^2) + 2x^2 g''(\dots) & 2xy g''(\dots) \\ 2xy g''(\dots) & g'(x^2+y^2) + 2y^2 g''(\dots) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (g')^2 + 2(x^2+y^2) g' g'' + \cancel{4x^2y^2 (g'')^2} - \cancel{4x^2y^2 (g'')^2} \\ &= g'(x^2+y^2) [g'(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) g''(x^2+y^2)] \end{aligned}$$

$$\text{Det} \geq 0 \Leftrightarrow g'(z) [g'(z) + 2z g''(z)] \geq 0.$$

Per avere i 2 elementi sulla diagonale ≥ 0 serve

$$g'(z) + 2z g''(z) \geq 0 \quad \text{e anche} \quad g'(z) \geq 0$$

potrebbe essere $y=0$ potrebbe essere $x=0$

Nell'esempio $g(z) = \log(1+z)$

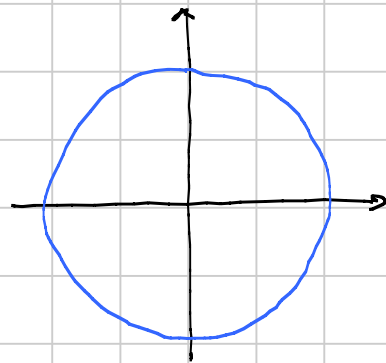
$$g'(z) = \frac{1}{1+z} \quad g''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$g'(z) + 2z g''(z) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+z} - \frac{2z}{(1+z)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-z}{(1+z)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z \leq 1.$$

Conclusione : $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ è
convessa in $x^2 + y^2 \leq 1$.

Achtung! In analisi 1 le
funzioni alternano
tratti di concavità
e convessità



In analisi 2 non è più vero!

Questo perché ci possono essere intere zone con
 $Hf(x, y)$ indefinita.

Se ci restringiamo a rette vediamo restrizione
concava / convessa a seconda del segno di

$$\langle Hf(u, v), v \rangle.$$