

Teoria classica funzioni convesseCONVESSITÀ E CONTINUITÀ

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.
Allora

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è loc. lip. in $\text{Int}(C)$

CONVESSITÀ E DERIVATA PRIMA

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso APERTO

Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

- (1) f è convessa in C
- (2) ∇f è monotono (debolmente crescente)
- (3) il grafico di f sta sopra i piani tangenti

CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso APERTO

Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2

Allora sono equivalenti

- (1) f è convessa in C
- (2) $Hf \geq 0$ in C (la matrice Hessiana è semidef. pos. in C)

Oss. Per la stretta convessità valgono caratterizz. analoghe come ad analisi 1 (esercizio).

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque, e sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione (vettoriale)
↑
stesso n.

Si dice che g è monotona (debolmente crescente) se

$$\langle g(y) - g(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in A, \forall y \in A$$

Oss. Se $n=1$, questa è la debbole crescenza

Oss. Se g è la rot. di 90° intorno all'origine in $\mathbb{R}^2$, allora è monotona (il prod. scalare viene sempre 0).

Dim. di convessità vs derivata prima

(1) $\Rightarrow$ (2) Hp: f convessa C^1 Tesi ∇f monotono

Dati x_0 e x_1 in C , poniamo $v := x_1 - x_0$ e consideriamo

$$\varphi(t) := f(x_0 + tv)$$

f conv. $\Rightarrow \varphi$ conv. $\Rightarrow \varphi'(t)$ monotona $\nearrow$

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle$$

$$\varphi'(1) \geq \varphi'(0) \Rightarrow \langle \nabla f(\underbrace{x_0 + v}_{x_1}), v \rangle \geq \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(x_1), v \rangle \geq \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \nabla f \text{ è monotono in } C.$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Come sopra sappiamo che $\varphi(t)$ è convessa
su $t \in [0, 1]$, quindi sta sopra la retta tang.
in $t=0$.

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)t$$

Pongo $t=1$ e ottengo

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + \varphi'(0), \text{ cioè}$$

$$f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\text{piano tangente al grafico}}$$

in x_0 calcolato in x_1

$$x \rightarrow f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Hp : ∇f monotono Tesi : f convessa

Basta dim. che le $\varphi(t)$ come sopra sono convesse, cioè che
hanno $\varphi'(t)$ debolmente crescente.

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + t u), u \rangle$$

Prendo $t_2 > t_1$ e vedo se $\varphi'(t_2) \geq \varphi'(t_1)$

$$\varphi'(t_2) \geq \varphi'(t_1) \Leftrightarrow \langle \nabla f(x_0 + t_2 u), u \rangle \geq \langle \nabla f(x_0 + t_1 u), u \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \nabla f(x_0 + t_2 u) - \nabla f(x_0 + t_1 u), u \rangle \geq 0$$

$$\text{(uso } t_2 > t_1) \quad \Leftrightarrow \langle \underbrace{\nabla f(x_0 + t_2 u)}_{y_2} - \underbrace{\nabla f(x_0 + t_1 u)}_{y_1}, \underbrace{(t_2 - t_1) u}_{y_2 - y_1} \rangle \geq 0$$

L'ultima disug. è vera per monotonia del gradiente.

(3) $\Rightarrow$ (2) Hp: f sta sopra i piani tangenti
Tesi: ∇f è monotono

Siano x_1 e x_0 in C . Sappiamo che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle$$

$$f(x_0) \geq f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_0 - x_1 \rangle$$

Quando sommiamo, le f si semplificano e troviamo

$$0 \geq \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle + \langle \nabla f(x_1), x_0 - x_1 \rangle \\ - \langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0 \rangle$$

Raccogliendo ho la tesi.

— o — o —

Dimostrazione di convessità vs derivata seconda

Definiamo $\varphi(t)$ come al solito. Ora sono di classe C^2 e quindi

f convessa $\Leftrightarrow$ le $\varphi(t)$ sono convesse $\Leftrightarrow$ le $\varphi''(t) \geq 0$

Tutto sta a calcolare $\varphi''(t)$ con $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$

Questo si può fare usando la chain-rule oppure usando Taylor. Usiamo Taylor

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + \langle \nabla f(y_0), k \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) k, k \rangle + o(|k|^2)$$

$$\varphi(t_0 + R) = f(x_0 + (t_0 + R)v) = f(\underbrace{(x_0 + t_0 v)}_{y_0} + \underbrace{Rv}_k)$$

$$\begin{aligned}
\varphi(t_0 + R) &= f(x_0 + t_0 v) + \langle \nabla f(x_0 + t_0 v), R v \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle H f(x_0 + t_0 v) R v, R v \rangle + o(|R v|^2) \\
&= \varphi(t_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_0 v), v \rangle R}_{\varphi'(t_0)} \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\langle H f(x_0 + t_0 v) v, v \rangle R^2}_{\varphi''(t_0)} + o(R^2)
\end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che $\varphi''(t) := \langle H f(x_0 + t v) v, v \rangle$

Quindi $\varphi''(t) \geq 0 \Leftrightarrow H f \geq 0$ in tutti i punti.

Achtung! Le funzioni possono essere convesse senza essere C^1 o C^2 . In quel caso occorre usare la definizione.

Esempio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$

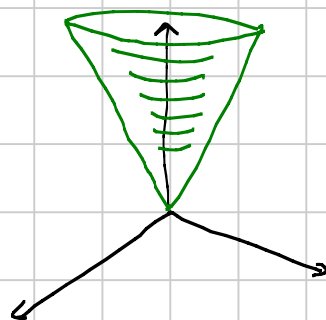
Per vedere che è convessa uso la def.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$$

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda |x| + (1-\lambda)|y| = \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$$

↑
triang.



Come si dim. la triangolare? $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow$

$$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + 2\langle x, y \rangle \leq \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + 2|x| \cdot |y|$$

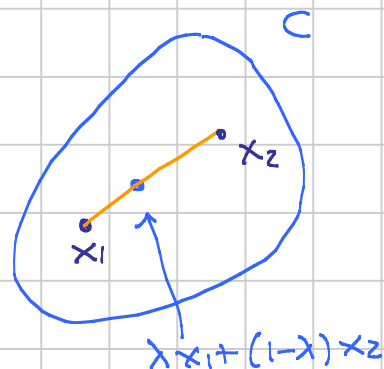
c.s.

Esercizio Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora i sottolivelli

$$S_M := \{x \in C : f(x) \leq M\}$$

sono a loro volta insiemi convessi

Siano x_1 e x_2 in un certo S_M . Voglio dim. che tutto il segmento di estremi x_1 e x_2 sta in S_M



$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &\leq \lambda M + (1-\lambda)M \\ &= M \end{aligned}$$

Vale il viceversa? Se i sottolivelli sono convessi, allora f è convessa

Falso già ad analisi 1!!! $f(x) = \sqrt{|x|}$

I sottolivelli sono segmenti, ma non è convessa
— o — o —

Esercizio $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa $\Leftrightarrow$

il sopragrafico $\{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$

è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$.