

# INSIEMI E FUNZIONI CONVESSE

Def (Insieme convesso) Sia  $V$  uno sp. vett., sia  $C \subseteq V$  un sottoinsieme. Si dice che  $C$  è convesso se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

(Brutalmente: se  $C$  contiene  $x$  e  $y$ , allora  $C$  contiene tutto il segmento di estremi  $x$  e  $y$ )

Def. Dati  $x$  e  $y$  in  $V$  sp. vett., si dice segmento di estremi  $x$  e  $y$  l'insieme dei p.ti del tipo

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in [0, 1]$$

Def. (Combinazione convessa) Dati  $x_1, \dots, x_n$  in  $V$  sp. vett., si dice comb. convessa ogni p.to del tipo

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \quad \text{con } \lambda_i \in [0, 1] \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$

Lemma Sia  $C$  convesso in  $V$  sp. vettoriale. Sia  $n \geq 1$  intero.

Siano  $x_1, \dots, x_n$  in  $C$ .

Allora tutte le comb. conv. di  $x_1, \dots, x_n$  stanno in  $C$ .

Dim Induzione su  $n$ .

$n = 1 \rightsquigarrow$  banale 😊

$n = 2 \rightsquigarrow$  def. di insieme convesso.

Passaggio induttivo  $n \Rightarrow n+1$ . Prendiamo  $n+1$  p.ti e una loro comb. convessa

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

- Se  $\lambda_{n+1} = 1$ , allora gli altri sono 0 e la tesi è ovvia
- Se  $\lambda_{n+1} < 1$ , allora  $1 - \lambda_{n+1} > 0$  e posso scrivere

$$(1 - \lambda_{n+1}) \left( \underbrace{\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}}}_{\mu_1} x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}}}_{\mu_n} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$$

Per ipotesi induttiva  $(\dots) \in C$  e concludo usando nuovamente la def. di convesso.

— o — o —

Def. (funzione convessa) Sia  $C$  sottoinsieme convesso di  $V$  sp. vett.. Sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si dice che  $f$  è convessa se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$$\forall x \in C$$

$$\forall y \in C$$

$$\forall \lambda \in [0, 1]$$

Si dice che  $f$  è strett. convessa se la disug. è stretta ogni volta che  $x \neq y$  e  $\lambda \in (0, 1)$ .

Def. Si dice che  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  è concava se soddisfa la proprietà analoga con  $\geq$ .  
È equivalente a dire che  $-f$  è convessa.

**Teorema (Jensen)** Sia  $C \subseteq V$  e sia  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  convessa.

Sia  $n \geq 1$  intero, siano  $x_1, \dots, x_n \in C$  e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ .

Allora

$$f(\lambda x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

sta in  $C$  grazie al  
lemma di prima

**Dim.**  $n=1$  banale,  $n=2$  def. di  $f$  convessa,  $n \Rightarrow n+1$  come nel lemma.

— o — o —

**Proposizione** (La convessità è un fatto uno-dimensionale)

Sia  $C \subseteq V$  convesso e sia  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(1)  $f$  è convessa in  $C$

(2)  $\forall x_0 \in C, \forall v \in V$  la funzione  $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$  è convessa per i valori di  $t$  per cui è definita.

**Dim.**  $(1) \Rightarrow (2)$

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(x_0 + \lambda t_1 v + (1-\lambda)t_2 v)$$

↓ splitto  $x_0$

$$= f(\lambda x_0 + \lambda t_1 v + (1-\lambda)x_0 + (1-\lambda)t_2 v)$$

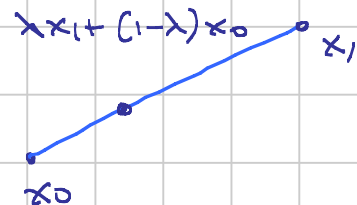
$$= f(\lambda(x_0 + t_1 v) + (1-\lambda)(x_0 + t_2 v))$$

(uso  $f$  convessa)

$$\leq \lambda f(x_0 + t_1 v) + (1-\lambda) f(x_0 + t_2 v)$$

$$= \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda) \varphi(t_2)$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Prendo  $x_0$  e  $x_1$  in  $C$  e una loro conv. conv.



$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) = f(x_0 + \lambda \overbrace{(x_1 - x_0)}^{\sigma})$$

$$= \varphi(\lambda)$$

$$= \varphi(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0)$$

(uso  $\varphi$  convessa)  $\leq \lambda \varphi(1) + (1-\lambda) \varphi(0)$

$$= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_0).$$

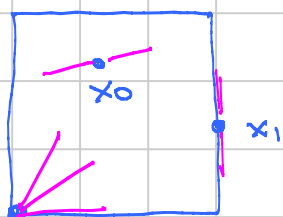
— 0 — 0 —

Def. (Punto estremoale) Sia  $C$  convesso in  $V$  vett.

Un p.to  $x_0 \in C$  si dice ESTREMALE se (ogni volta che sta in un segmento contenuto in  $C$ , allora è un estremo)

$$x \in C, y \in C, y \neq x, \lambda \in [0, 1], x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$$

Esempio 1  $C = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$



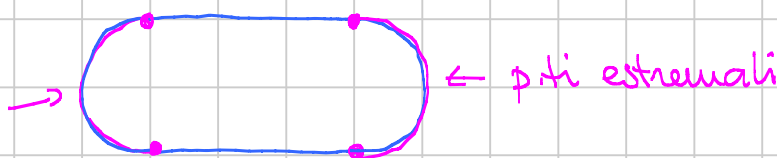
$x_0$  e  $x_1$  non sono estremali

I vertici sono gli unici p.ti estremali

Esempio 2  $C = \text{cerchio}$  P.ti estremali = circonferenza

Esempio 3

p.ti  
estremali



Esempio 4 Semipiano : no p.ti estremali

Prop. Sia  $C \subseteq V$  e sia  $f: C \rightarrow V$  strett. convessa.  
 Sia  $x_0 \in C$  un p.to di max per  $f$ .  
 Allora  $x_0$  è per forza un p.to estremo.

Dim. Supponiamo per assurdo  $x_0$  non estremo.  
 Allora

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

con  $\lambda \in (0,1)$  e  $x_1 \neq x_2$ . Ma allora

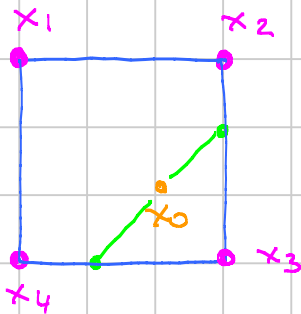
$$\begin{aligned} f(x_0) &< \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &\leq f(x_0) && \leq f(x_0) \text{ se } x_0 \text{ p.to max} \\ &= f(x_0) \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Teo. misterioso Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottoinsieme convesso e COMPATTO.

Allora

- (1) esistono dei p.ti estremali
- (2) ogni p.to  $x_0 \in C$  si può scrivere come comb. conv. di al massimo  $(n+1)$  p.ti estremali di  $C$ .

Esempio



$x_0$  si può scrivere come comb. convessa di  $x_2, x_3, x_4$

Prop Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e sia  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  convessa.  
 Supponiamo che  
 (i)  $C$  compatto  
 (ii)  $f$  continua

$\uparrow$   
 e basta

$$\max \{ f(x) : x \in C \} = \max \{ f(x) : x \in \text{p.ti estrem. di } C \}$$

Oss. Non è vero che tutti i pti di max sono estremali, ma ce ne sono che lo sono.

Dim. Segue dal teorema misterioso.

L'esistenza del max segue da W.

Sia  $x_0$  un pto di max.

Per il teo. misterioso lo posso scrivere come

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1} \quad \text{con } x_i \text{ estremali}$$

$$f(x_0) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \quad \begin{array}{l} \text{almeno quelli con} \\ \nearrow \text{coeff. } \neq 0. \end{array}$$

Questo basta per dire che tutti gli  $f(x_i)$  sono uguali ad  $f(x_0)$ . Se uno fosse minore, WLOG  $f(x_1)$ , avremmo

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\ &\quad < f(x_0) \quad \leq f(x_0) \\ &< (\lambda_1 + \dots + \lambda_{m+1}) f(x_0) = f(x_0) \\ &\quad \quad \quad \text{--- } 0 \quad \text{--- } 0 \quad \text{---} \end{aligned}$$