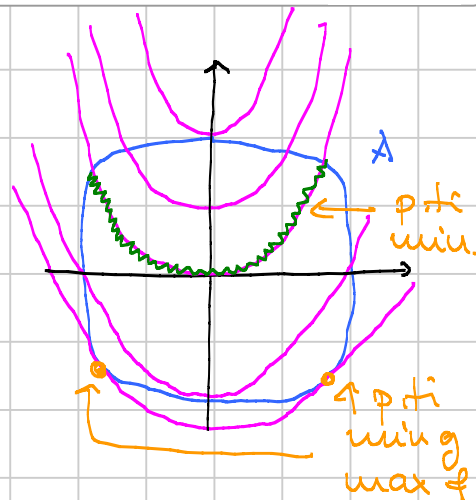


Esercizio 1

$$f(x,y) = |y - x^2|$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 5\}$$

Domanda: max/min di $f(x,y)$ in A



• Weierstrass $\Rightarrow$ max/min esistono

• Studio max/min della funzione senza valore assoluto

Pongo $g(x,y) = y - x^2$

$\rightarrow$ stat. interni: $\emptyset$ $\nabla g(x,y) = (-2x, 1) \neq (0,0)$

$\rightarrow$ sing. int.: $\emptyset$

$\rightarrow$ bordo: uso i moltiplicatori con vincolo $x^4 + y^4 - 5 = 0$

* 1° sistema:
$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 5 \end{cases} \leadsto \text{NO SOL.}$$

* 2° sistema:
$$\begin{aligned} -2x &= 4\lambda x^3 \\ 1 &= 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 &= 5 \end{aligned}$$

1° equ $\swarrow$ $x=0$ $\searrow$ 2° equ $-2 = 4\lambda x^2 \leadsto \lambda = -\frac{1}{2x^2} \leadsto \lambda = \frac{1}{4y^3}$

$\downarrow$ 3° equ. $y = \pm 5$ $\leadsto 2x^2 = -4y^3 \leadsto x^2 = -2y^3$

$\downarrow$ $(0, \pm \sqrt[4]{5})$ 3° equ $\leadsto 4y^6 + y^4 = 5 \leadsto z = y^2$

$$4z^3 + z^2 - 5 = 0 \leadsto z=1$$

$$\begin{array}{r|l} 4z^3 + z^2 - 5 & z-1 \\ -4z^3 + 4z^2 & \\ \hline 5z^2 - 5 & \end{array}$$

$$4z^2 + 5z + 5 > 0 \text{ sempre } \text{☺}$$

$$\leadsto y = \pm 1 \xrightarrow{\text{3a equ}} x^4 = 4 \leadsto x = \pm \sqrt{2} \leadsto (\pm \sqrt{2}, \pm 1)$$

Oss. Se ero più saggio e usavo $x^2 = -zy^3$ vedevo che $y = \pm 1$ non va bene, una parienza.

Limitandosi allo studio di g abbiamo i candidati

$$(0, \pm \sqrt[4]{5}) \leadsto g = \pm \sqrt[4]{5}$$

$$(\pm \sqrt{2}, 1) \text{ (abusivo)} \leadsto g = 1 - 2 = -1$$

$$(\pm \sqrt{2}, -1) \leadsto g = -1 - 2 = -3$$

$$\text{Conclusione: } \max g = \sqrt[4]{5} \quad \text{p.to di max} = (0, \sqrt[4]{5})$$

$$\min g = -3 \quad \text{p.ti di min} = (\pm \sqrt{2}, -1)$$

Mettere i valori assoluti = ribaltare le parti negative, quindi

$$\max \{ f(x,y) : (x,y) \in A \} = 3 \quad \text{p.ti di max} = (\pm \sqrt{2}, -1)$$

$$\min \{ \quad \quad \quad \} = 0 \quad \text{p.ti di min} = \text{tutti i pti della parabola } y = x^2 \text{ che cascano in } A.$$

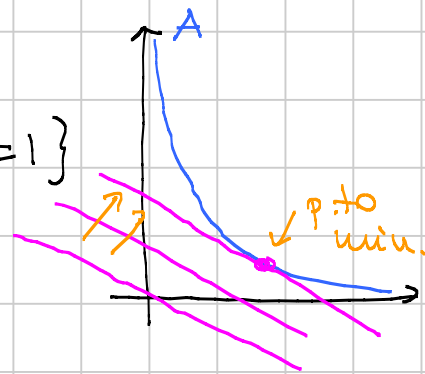
↑ tutti p.ti singolari interni

Tecnica standard : se c'è da fare max/min di $|f(x)|$, lo faccio per $f(x)$ e poi deduco.

Esempio 2 $f(x,y) = x+2y$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy=1\}$$

A non è cpt. (non è lim.) $\Rightarrow$ guai !!



Facile : $\sup \{f(x,y) : (x,y) \in A\} = +\infty$ ($\Rightarrow$ max N.E.)

$$\underbrace{f\left(t, \frac{1}{t}\right)}_{\in A \text{ per ogni } t > 0} = t + \frac{2}{t} \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

SE sapessi che il min. esiste, potrei usare i moltiplicatori con $f(x,y) = x+2y$, $g(x,y) = xy-1$

• 1° sistema: $\emptyset$

• 2° sistema
$$\begin{cases} 1 = \lambda y \\ 2 = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{y} \leadsto x = 2y \\ \lambda &= \frac{2}{x} \\ &\uparrow \\ &\text{osservo che } x \neq 0, y \neq 0 \\ &\downarrow \\ 2y^2 &= 1 \leadsto y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\quad x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Per forza $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è il pto di min. e il min vale $2\sqrt{2}$.

Resta il pbm. di quel SE, senza il quale non abbiamo dim. nulla. Come ce la caviamo?

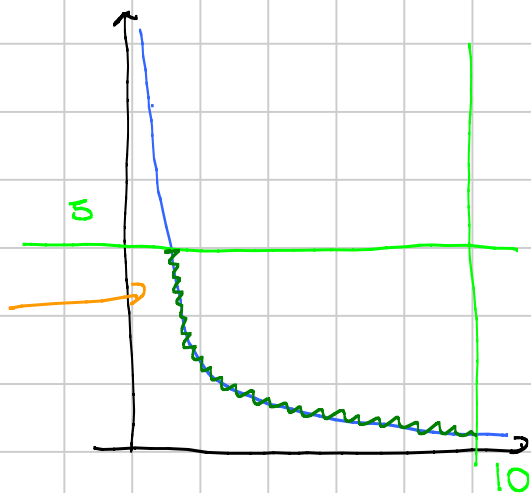
1° modo Provo ad usare W. generalizzato, quindi cerco un sottolivello $\neq \emptyset$ e compatto

$$f(x,y) \leq 10, \text{ cioè } x+2y \leq 10$$

Tenendo conto che in A vale $x \geq 0$ e $y \geq 0$, da questa deduciamo che $x \in [0, 10]$, $y \in [0, 5]$.

Il sottolivello è non vuoto perché $f(\underbrace{1, 1}_{\in A}) \leq 10$

il sottolivello sta
in questa zona
che è opt.



Questo sistema tutto.

2° metodo Sostituzione del vincolo $y = \frac{1}{x}$ $x > 0$

$f(x, y) = x + \frac{2}{x}$ che studio per $x > 0$ e diventa
analisi 1.

Esempio 3 $A = \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ $f(x, y, z, w) = \frac{xyz^2w^2}{x^6 + y^6 + z^6 + w^6}$

Inf / sup / max / min di f in A .

Si potrebbero fare gradiente (e magari pure Hessiano!) 😊

A non è né chiuso, né limitato 😞

Osservazione chiave : $f(x, y, z, w)$ è omogenea di grado 0,
cioè

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w) = f(x, y, z, w)$$

Quindi f è costante sulle semirette uscenti dall'origine.

(oss.: quindi se c'è un min, ci sono infiniti p.ti in cui $\nabla f = 0$ e in tutti quei p.ti H_f ha autov. nullo)

Dalla 0-homogeneità deduciamo che max/min su A coincidono con max/min su $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

La sfera è opt. $\Rightarrow$ max e min esistono 😊

Altra oss.: max e min su A coincidono con max/min su

$$x^6 + y^6 + z^6 + w^6 = 1 \quad (\text{o anche } 2017, \text{ se mi torna meglio})$$

Quindi alla fine è equivalente a calcolare max/min di

$$f(x, y, z, w) = x y z^2 w^2$$

con il vincolo che $g(x, y, z, w) = x^6 + y^6 + z^6 + w^6 - 1 = 0$

E questo viene abbastanza facile con i moltiplicatori (occhio a non semplificare x, y, z, w nel sistema!).
— 0 — 0 —