

$$\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}} \stackrel{?}{>} 1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + 2\sqrt{\frac{1}{9}} \stackrel{?}{>} 1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{>} 1 \quad \boxed{SI}$$

Esercizio (dei vecchi televisori) Cosa rappresentano

$$\begin{aligned} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\} \\ x^6 + y^6 = 1 \\ |x|^a + |y|^a = 1 \end{aligned}$$

Se $a=2$, si tratta di una circ.

Se $a=1$, si tratta di un quadrato
"ruotato"

Osserviamo che quando a "cresce"

l'insieme "contiene" il precedente, ad esempio

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow x^4 + y^4 \leq 1 \Rightarrow x^6 + y^6 \leq 1$$

Quando $a \rightarrow \infty$, l'insieme "tende al quadrato".

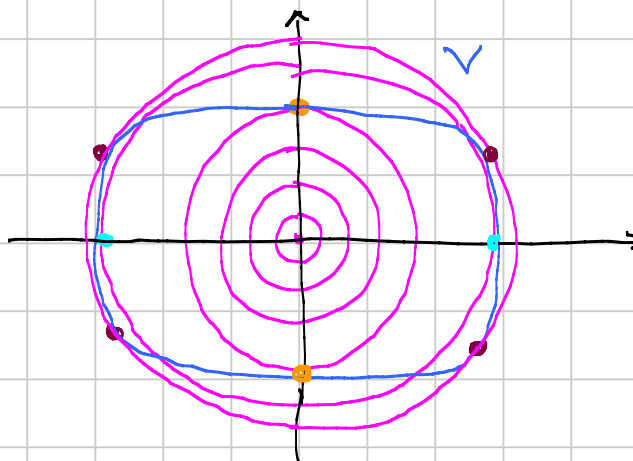
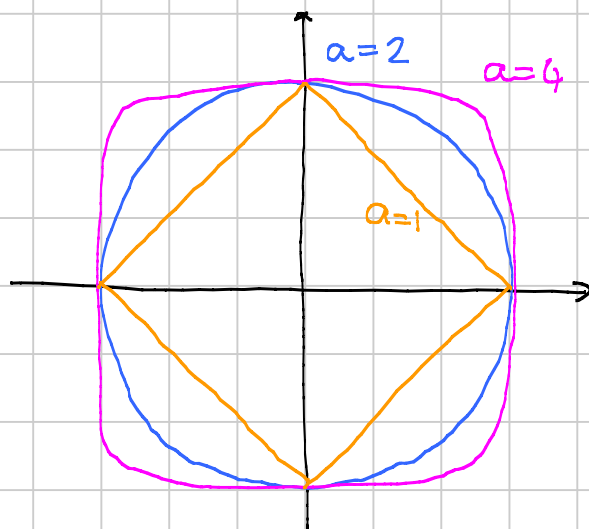
Esempio della let. prec. con linee di livello

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$V = \{(x,y) : x^4 + 2y^4 = 1\}$$

Quando faccio "λ sale" il primo
contatto è nei pti $(0, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$
che sono i pti di min.

Successivamente un contatto in $(\pm 1, 0)$



L'ultimo contatto avviene in 4 pti simmetrici, che sono in effetti i 4 pti di max/min.

Brutal mode :

- i pti di max/min sono pti in cui le linee di livello di f sono tangenti a V
- nei pti di max/min le linee di livello di f e g sono tangenti, quindi hanno la stessa retta tangente
- le rette tangenti sono $\perp$ al gradiente
- Allora ∇f e ∇g devono essere paralleli nei pti di max/min.

— o — o —

Esempio $f(x,y) = 3x+y$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], x^2 = y^3\}$$

V è cpt. $\Rightarrow$ max e min esistono

$$g(x,y) = x^2 - y^3$$

1° sistema

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

$(0,0)$ resolve il 1° sistema !!!

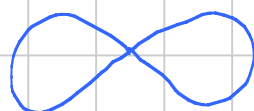
Brutale: quando il 1° sistema ha soluzione, è probabile che in quel pto succeda qualcosa di strano, tipo



cuspidi



autointersezioni



anche nulla



2° sistema

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g = 0$$

$$3 = 2\lambda x$$

$$1 = -3\lambda y^2$$

$$x^2 = y^3$$

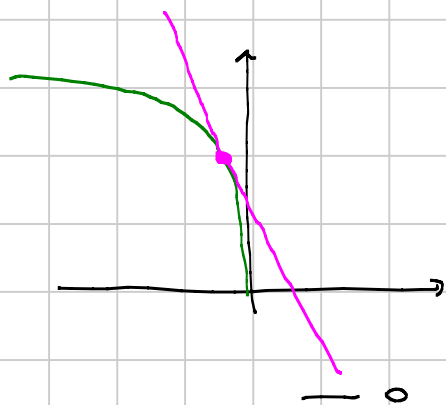
$$x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$y = \sqrt{\frac{-1}{3\lambda}}$$

3° equ. $\leadsto \frac{9}{4\lambda^2} = -\frac{1}{3\lambda} \sqrt{\frac{-1}{3\lambda}}$

$$\frac{81}{16\lambda^4} = \frac{-1}{9\lambda^2 \cdot 3\lambda}$$

$\leadsto$ semplifico λ^3 e trovo 1 sol.
con $\lambda < 0$ equindi $x < 0$



(p.to in cui la famiglia
 $y = \lambda - 3x$
è tangente a v)

Esempio 2 (Utilizzo misto di moltiplicatori e altre tecniche)

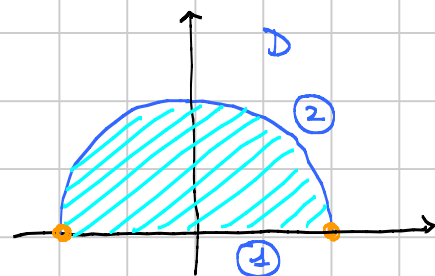
$$f(x,y) = x - y^2 \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

Max/min di f in D .

$\rightarrow$ Esistono per W.

$\rightarrow$ sing. interni : $\emptyset$

$\rightarrow$ stat. interni : $\nabla f(x,y) = 0 \quad \begin{cases} 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \leadsto \emptyset$



$\rightarrow$ bordo, fatto da 2 pezzi

① lo parametrizzo $\textcircled{1} = \{(t,0) : t \in [-1,1]\}$

$\varphi_1(t,0) = t \leadsto$ candidati : $\boxed{(-1,0) \text{ e } (1,0)}$

② Puoi parametrizzarlo come $\{(\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]\}$ e studiare

$$\varphi_2(t) := \cos t - \sin^2 t \quad \text{per } t \in [0, \pi]$$

In alternativa posso usare i moltiplicatori di Lagrange con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

- MA**
- devo considerare solo i candidati nella parte alta
 - devo includere d'ufficio gli estremi del pezzo ② (bordi dei bordi, detti anche p.ti di taglio).

1° sistema $\leadsto \dots \leadsto$ non ha soluzioni

$$2^\circ \text{ sistema } \leadsto \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} +1 = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

2° equ

$y = 0$
 $\downarrow 3^\circ \text{ equ.}$
 $x = \pm 1$
 $\downarrow$
 $(\pm 1, 0)$

$\lambda = -1$
 $\downarrow 1^\circ \text{ equ}$
 $x = -\frac{1}{2}$
 $\downarrow 3^\circ \text{ equ}$
 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dal sistema si trovano i p.ti

$(1, 0)$ $(-1, 0)$

$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\downarrow$
NO perché sta sotto

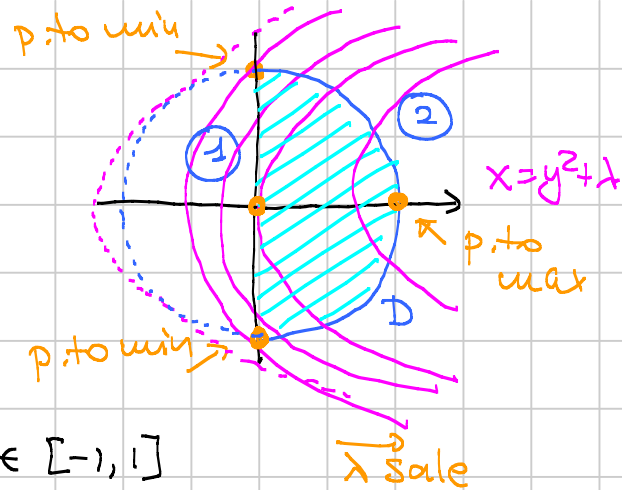
Sostituendolo si vede chi è max/min.

Esempio 3 $f(x,y) = x - y^2$

- Esistenza, sing. int. e stat. int.

Come sopra

Passiamo al bordo



- ① $\varphi_1(t) := -t^2$ da studiare per $t \in [-1, 1]$

max per $t=0 \rightsquigarrow (0,0)$

mit $t = \pm 1 \leadsto (0, 1), (0, -1)$

- ② Con i moltiplicatori trovo gli stessi prti di prima

$(1, 0)$

OK

$(-1, 0)$

NO BUONI!

$$\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1 0 1 0 1