

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (Caso di un moltiplicatore)

Def. (Luogo di zeri) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funz.
L'insieme

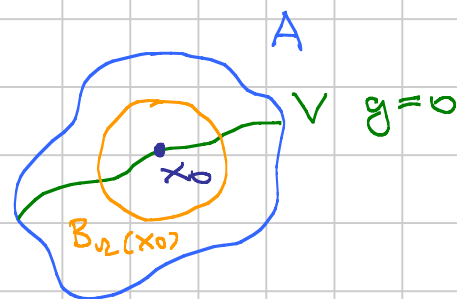
$$V := \{x \in A : g(x) = 0\} \quad (\text{vincolo})$$

si dice luogo di zeri di g .

Def. (Max/min locale vincolato) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$
Sia V come sopra (luogo di zeri di g). Sia $x_0 \in V$.
Diciamo che x_0 è p.to di min. locale per f ristretto al
vincolo V se

$$\exists r > 0 : f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0) \cap V$$

La def. è analoga per i p.ti di max
locale vincolato.



Teorema (Misterioso)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $r > 0$, siano $f: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$
Sia V il luogo di zeri di g .

Supponiamo che

(i) $x_0 \in V$ è p.to di max/min. locale per f in V

(ii) f e g diff. in $B_r(x_0)$

Allora si ha almeno una delle seguenti possibilità

(1) $\nabla g(x_0) = 0$

(2) $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla g(x_0)$, cioè

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

moltiplicatore di
Lagrange

Utilizzo operativo

- Devo fare max/min di f su un certo insieme V
- Scrivo V come luogo di zeri di una certa g .
(non cambia nulla se l'eq. di V è $g(x) = 19$)
- Cerco i p.ti di V che rientrano nella categoria (1), cioè risolvo il sistema

$$\left. \begin{array}{l} \nabla g(x) = 0 \rightarrow n \text{ equ.} \\ g(x) = 0 \rightarrow 1 \text{ equ.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (n+1) \text{ equ. in } n \text{ incognite} \\ \text{"spesso" non ci saranno} \\ \text{soluzioni} \end{array}$$

- Cerco i p.ti di V che rientrano nella categoria (2), cioè risolvo il sistema

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (n+1) \text{ equ., con } (n+1) \text{ incognite } (x \text{ e } \lambda) \\ \text{"spesso" ci sarà un numero finito} \\ \text{di soluzioni} \end{array}$$

- Prendo i p.ti x trovati risolvendo i 2 sistemi (nel secondo caso mi dimentico del λ) e quelli sono i candidati ad essere i p.ti di max/min (di f ristretta a V).

Oss. Se siamo in dim. 2, i due sistemi diventano

$$\boxed{\begin{array}{l} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array}} \quad \text{1° sist}$$

3 equ.
2 incognite

$$\boxed{\begin{array}{l} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array}} \quad \text{2° sist.}$$

3 equ.
3 incognite: x, y, λ

Oss. Risolvere il 2° sistema equivale a trovare i pti stazionari della funzione di 3 variabili

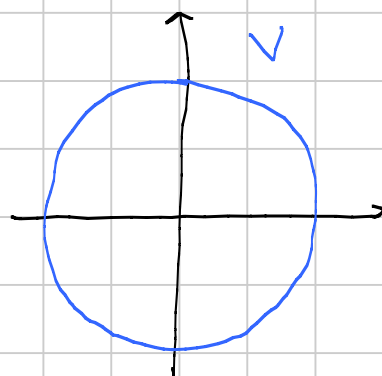
$$F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

La terza equ. è equivalente a $F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$.

In n variabili diventa $F(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x)$
 $\uparrow$ n var. $\uparrow$ 1 var.

Esempio 1 $A = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x - y$,

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$



Weierstrass $\Rightarrow$ max e min. esistono

V è luogo di zeri di $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

1° sistema

$\downarrow$
NO SOL.

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ che} \\ \text{è incompatibile} \\ \text{con 3° equ.}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 2x \\ -1 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Osservo che per forza $\lambda \neq 0$ e ricavo x e y dalle prime 2

$$x = \frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \quad \text{vado nella 3ª: } \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

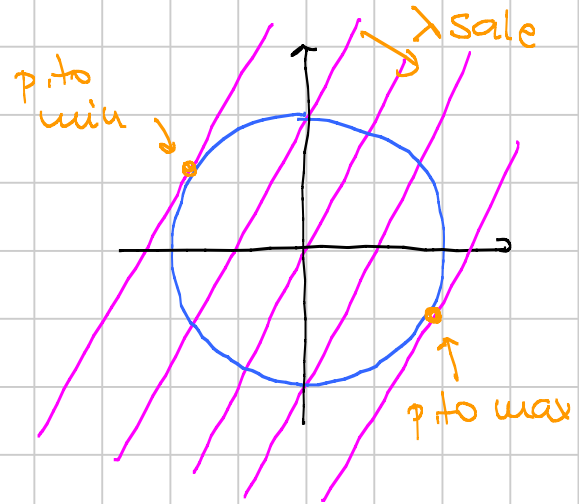
$$1 + \frac{1}{4} = \lambda^2 \rightsquigarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \rightsquigarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \rightsquigarrow \text{ricavo } x \text{ e } y$$

$$(x, y) = \left(+\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{pto di max} \quad , \quad (x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{pto di min.}$$

Sostituendo scopro quale dei due è p.to di max/min.

Oss. Allo stesso risultato si arrivava con le linee di livello

$$2x - y = \lambda \quad y = 2x - \lambda$$



Oss. Visto che λ alla fine si butta, si può risolvere il sistema senza calcolarlo.

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = \frac{1}{x} \\ \lambda = -\frac{1}{2y} \end{matrix} \quad \leadsto \frac{1}{x} = -\frac{1}{2y} \quad \leadsto x = -2y$$

Sostituendo nella 3ª equ. trovo $4y^2 + y^2 = 1 \leadsto y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\downarrow$
 $x = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$

Esempio 2 $A = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y^4 = 1 \} \quad g(x, y) = x^4 + 2y^4 - 1$$

V è cpt. (chiuso e contenuto in $[-1, 1] \times [-1, 1]$)

$W \Rightarrow$ max e min esistono

1º sistema
$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 8y^3 = 0 \\ x^4 + 2y^4 = 1 \end{cases} \quad \leadsto \text{NO SOLUZ.}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 2y = 8\lambda y^3 \\ x^4 + 2y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + 2y^4 = 1 \end{cases}$$

Occhio a risolvere il sistema

1° equ

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ x=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ 1 = 2\lambda x^2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2x^2} \end{array}$$

3° equ

$$2y^4 = 1 \rightarrow y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

2° equ

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \lambda = \frac{1}{4y^2} \end{array}$$

3° equ

$$x^4 = 1, x = \pm 1$$

3° equ

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{4y^2} \rightarrow 2y^2 = x^2 \rightarrow 4y^4 = x^4 \rightarrow 6y^4 = 1$$

$$(0, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}})$$

2 candidati

$$(\pm 1, 0)$$

2 candidati

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \leftarrow x^4 = \frac{2}{3} \leftarrow y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}} \leftarrow 6y^4 = 1$$

$$\left(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}} \right)$$

4 candidati

Sostituendo gli 8 pti trovo max/min

$$(0, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}) \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

minimo

$$(\pm 1, 0) \rightsquigarrow 1$$

se si gioca per il max

$$(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}}) \rightsquigarrow \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$