

ROAD MAP PER PROBLEMI MAX/MIN

Setting: data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, trovare max/min.

Esistenza $\rightarrow$ banale se f continua + D compatto
 $\rightarrow$ grosso pbm. se D non è cpt. (nessuna regola, se non le varianti di W.)

Trovare esplicitamente

$\rightarrow$ vedere a occhio

$\rightarrow$ linee di livello

$\rightarrow$ procedura standard con staz., sing. e pti di bordo.

Per il bordo vedremo 2 metodi

• param. del bordo

• moltiplicatori di Lagrange.

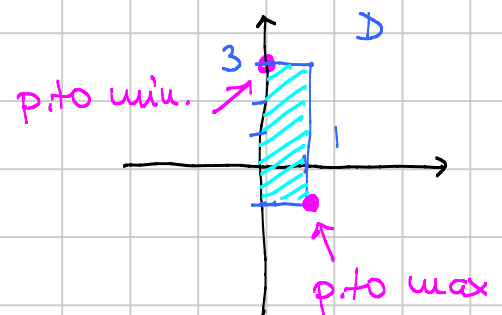
— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = 3x - 2y$ $D = [0, 1] \times [-1, 3]$

A occhio vedo che

- $\max f = f(1, -1) = 5$
 $\uparrow$
 $x + \text{grande possibile}$
 $y + \text{neg. possibile}$

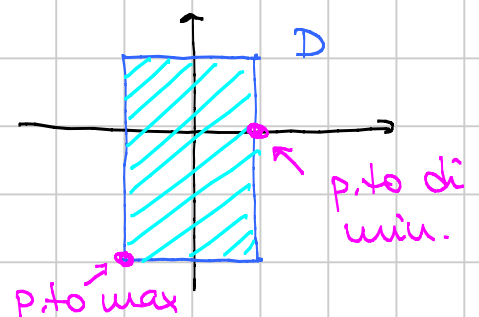
- $\min f = f(0, 3) = -6$



Esempio 2 $f(x, y) = y^2 - 3x$ $D = [-1, 1] \times [-2, 1]$

- $\max f = f(-1, -2) = 7$

- $\min f = f(1, 0) = -3$



Esempio 3 $f(x,y) = x+2y$

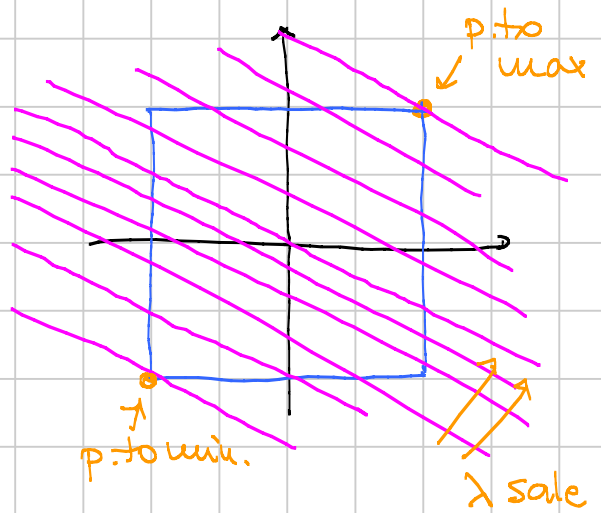
$$D = [-1,1] \times [-1,1]$$

- $\max f = f(1,1) = 3$
- $\min f = f(-1,-1) = -3$

In alternativa, guardo le linee di livello di $f(x,y)$:

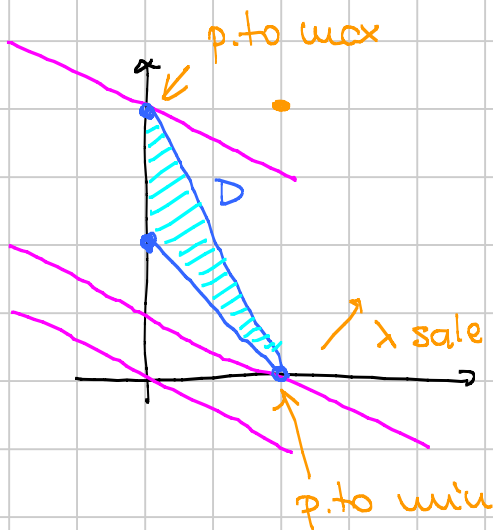
$$x+2y = \lambda \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{\lambda}{2}$$

- $\max f =$ massimo valore di λ per cui la linea tocca D
- $\min f =$ minimo " " " " "



Esempio 4 $f(x,y) = x+2y$

$D =$ triangolo chiuso con vertici in $(0,1), (0,2), (1,0)$



Non pensare nemmeno:

$\max f = x + \text{grande} + y + \text{grande}$
 $\leadsto (1,2) \leadsto 7$

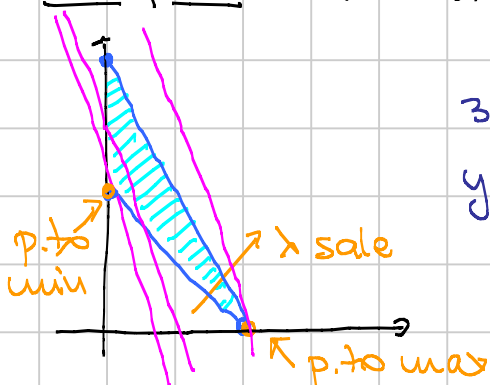
Guardando le linee di livello

$$\bullet \max f = f(0,2) = 4$$

$$\bullet \min f = f(1,0) = 1$$

Esempio 5 $f(x,y) = 3x + y$

$D =$ triang. di prima



$$3x+y = \lambda$$
$$y = \lambda - 3x$$

$$\bullet \max f = f(1,0) = 3$$

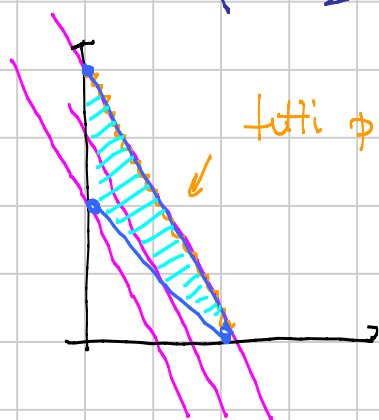
$$\bullet \min f = f(0,1) = 1$$

Esempio 6 $f(x,y) = 2x + y$

$D =$ come prima

• $\min f = 1 \rightsquigarrow$ p.to di min = $(0,1)$

• $\max f = 2 \rightsquigarrow$ p.to di max = tutti gli infiniti p.to del lato con estremi $(1,0)$ e $(0,2)$



tutti p.to di max.

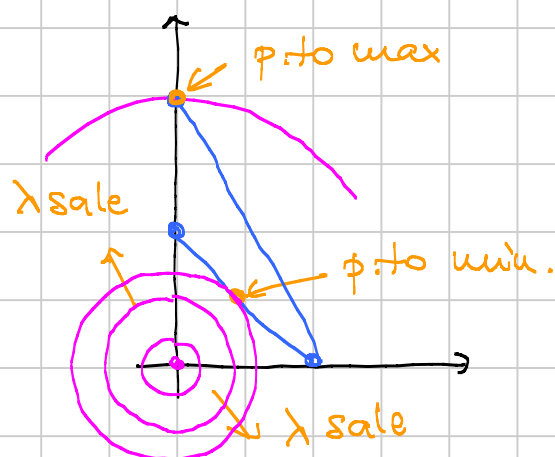
Esempio 7 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$D =$ come prima

$x^2 + y^2 = \lambda \rightsquigarrow$ circonferenze

• $\min f = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

• $\max f = f(0,2) = 4$.



Esempio 8 $f(x,y) = x - y$

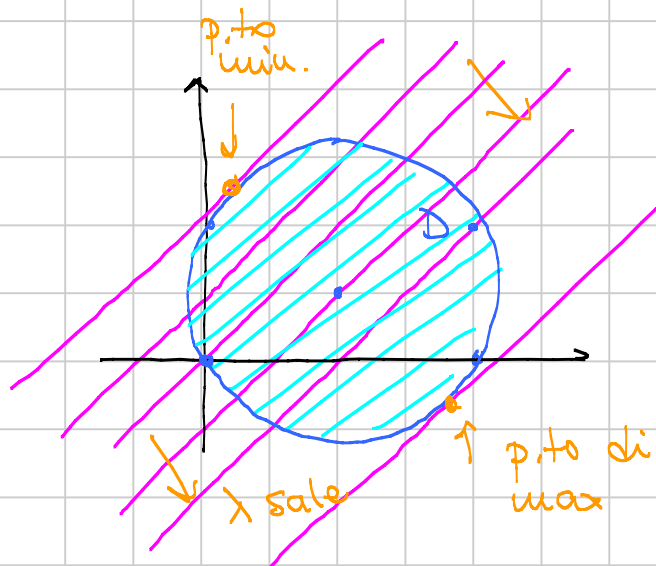
$D =$ cerchio (chiuso)
con centro in $(2,1)$
e passante per $(0,0)$

$x - y = \lambda \quad y = x - \lambda$

Per trovare p.to di max min
cerco i p.to di tangenza
tra la circ.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x - y = \lambda \end{cases}$$

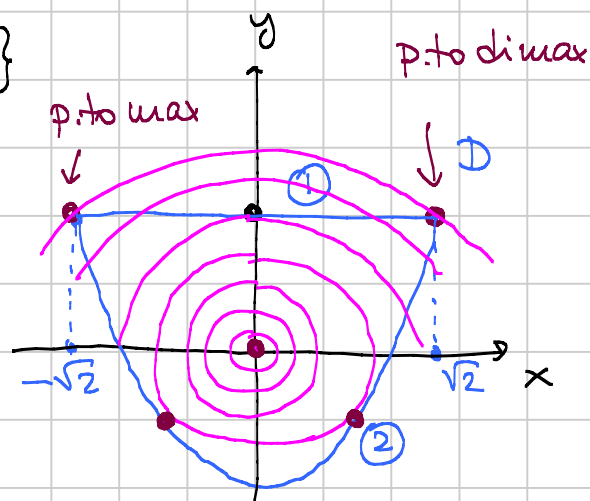
$\rightsquigarrow \Delta = 0 \rightsquigarrow$ percorso.



Esempio 9 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1\}$$

Con le linee di livello non è chiaro 😞



Procedimento sistematico

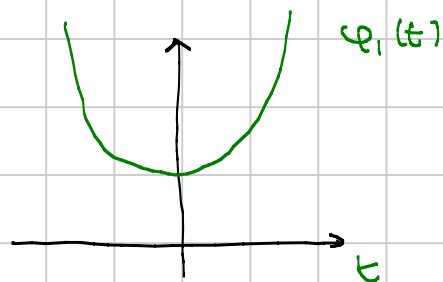
→ stat. interni: $\nabla f(x,y) = 0$ $(2x, 2y) = (0,0)$
 $\leadsto$ $(0,0)$ candidato #1

→ sing. interni: $\emptyset$

→ bordo: è fatto di 2 pezzi che vanno a parametrizzare

$$\textcircled{1} = \{(t, 1) : t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

$$\varphi_1(t) = f(t, 1) = t^2 + 1$$



Studiando $\varphi_1(t)$ per $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ trovo

min per $t=0 \leadsto$ p.to $(0,1)$
max per $t = \pm\sqrt{2} \leadsto$ p.ti $(\pm\sqrt{2}, 1)$] p.ti corrispondenti sul segmento

$$\textcircled{2} = \{(t, t^2 - 1) : t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= f(t, t^2 - 1) = t^2 + (t^2 - 1)^2 = t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 \\ &= t^4 - t^2 + 1\end{aligned}$$

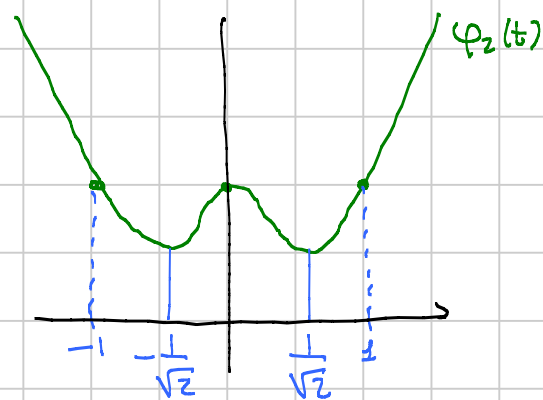
Studio $\varphi_2(t)$ per $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\varphi_2'(t) = 4t^3 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi per $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ abbiamo

max per $t = \pm\sqrt{2} \rightsquigarrow (\pm\sqrt{2}, 1)$

min per $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$



Morale: i candidati sono

$(0, 0) \rightsquigarrow f = 0 \leftarrow$

$(\pm\sqrt{2}, 1) \rightsquigarrow f = 3 \leftarrow$

$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) \rightsquigarrow f = \frac{3}{4}$

$(0, 1) \rightsquigarrow f = 1$

Conclusione

• max = 3, p.to di max $(\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1)$

• min = 0, p.to di min. $(0, 0)$

Esercizio Provare a fare con questa procedura alcuni degli esempi precedenti.