

TEOREMA (Caratterizzazioni della compattezza)

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

- (1) K è CHIUSO e LIMITATO
- (2) K è compatto per successioni
- (3) K è compatto per ricoprimenti

Ripasso definizioni

- chiuso vuol dire che il complementare è aperto
 $\forall x_0 \notin K \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B_r(x_0) \cap K = \emptyset$
- limitato vuol dire che $\exists R > 0 \quad \text{t.c.} \quad K \subseteq B_R(0)$
- compatto per succ. vuol dire $\forall \{x_n\} \subseteq K \quad \exists x_\infty \in K$ ed
 $\exists \{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ strett. cresc. t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$
- compatto per ricopr. vuol dire $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ di aperti di $\mathbb{R}^n$
 con

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\exists J \subseteq I, \text{ con } J \text{ finito, t.c.} \quad K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Dim di (2) $\Rightarrow$ (1)

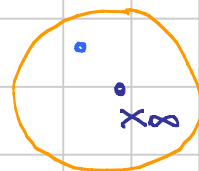
- (2) $\Rightarrow$ limitato. Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K \setminus B_n(0)$$

Questa x_n non può avere s.succ.com. (le succ. com. sono lim.)

- (2) $\Rightarrow$ chiuso. Supponiamo che k non lo sia. Allora

$\exists x_{\infty} \in \text{Clos}(k) \setminus k$, cioè



$\forall r > 0 \exists x \in k \cap B_r(x_{\infty})$

Me la gioco con $r = \frac{1}{n}$ e trovo x_n t.c. $x_n \xrightarrow{k} x_{\infty} \notin k$
 $\Rightarrow x_n$ non può avere s.succ. conv. ad el. di k .

Dim. che (1) $\Rightarrow$ (2) Per semplicità supponiamo $k \subseteq \mathbb{R}^2$
 Sia $\{(x_n, y_n)\} \subseteq k$ una succ.

Essendo k limitato, esiste almeno un $R > 0$ t.c.

$$x_n^2 + y_n^2 \leq R^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Da sopra deduco che $|x_n| \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ è una succ. limitata.

Bolzano - Weierstrass $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x_{\infty} \in \mathbb{R}$

- Sempre da sopra deduco che $|y_{n_k}| \leq R \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Allora $\{y_{n_k}\} \subseteq \mathbb{R}$ è una succ. lim.

Bolzano - W $\Rightarrow$

$$\exists y_{n_{k_i}} \rightarrow y_{\infty} \in \mathbb{R}$$

Osservo che $x_{n_{k_i}} \rightarrow x_{\infty} \in \mathbb{R}$ (sotto della prec.)

Dico che $(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) \rightarrow (x_{\infty}, y_{\infty}) \in k$

Sta in k perché è chiuso. La conv. segue da

$$\sqrt{(x_{n_{k_i}} - x_{\infty})^2 + (y_{n_{k_i}} - y_{\infty})^2} \rightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Oss. La dimostrazione è analoga, solo che ogni volta devo estrarre la s.succ. dalla precedente.
Formalmente è inclusione.

Esercizio Dimostrare le equivalenze con la (3) 😊

Teorema di Weierstrass Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f sia continua

(ii) K sia compatto. ($K \neq \emptyset$)

Allora esistono $\max / \min \{ f(x) : x \in K \}$

Se mi accontento del minimo, basta assumere f SCI
semicont. inf.

Dim Pongo

$$I := \inf \{ f(x) : x \in K \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

$$\exists \{y_n\} \subseteq f(K) \quad \text{t.c.} \quad y_n \rightarrow I \quad (\text{solito lemma})$$

$$\exists \{x_n\} \subseteq K \quad \text{t.c.} \quad f(x_n) = y_n \quad (\text{def. di inf.})$$

$$\exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in K \quad (K \text{ compatto})$$

Finale con continuità:

$$f(x_\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = I$$

$\uparrow$ f cont. $\uparrow$ def. x_n $\uparrow$ s.succ. $\uparrow$ def. y_n

Finale con SCI:

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = I$$

$\uparrow$ def. I $\uparrow$ SCI $\uparrow$ def. x_n $\uparrow$ s.succ. di succ. conv. $\uparrow$ def. di I

Supponiamo che

(ii) esiste un sottolivello non vuoto contenuto in un compatto, cioè

Allora esiste

Werte $\{f(x) : x \in D\}$.

Per W vero sappiamo che f ammette univ. in K .

- se $x \in K$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ (per defn. di x_0)

- se $x \notin K$, allora $f(x) > M \geq f(x_0)$
 $\uparrow$ def. di K $\uparrow$ gli el. di D contribuiscono al minimo.

— 0 — 0 —

(i) of SCI

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

mit $\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$

Dim. Scelgo un pto a caso, ad esempio 0, e considero

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \underbrace{f(0)}_M\}$$

È evidente che il sottolivello è

- $\neq \emptyset$ ($0 \in \text{s.liv.}$)
- chiuso (f è SCI) (se $x_n \rightarrow x_\infty$, $f(x_\infty) \leq \liminf f(x_n) \leq f(0)$)
- Limitato. Infatti per il Limite esiste R t.c.

$$f(x) \geq f(0) + 2017 \quad \text{quando } |x| \geq R$$

quindi tutti gli el. del sottolivello stanno in $B_R(0)$.

Quindi il sottoliv. è cpt. $\Rightarrow$ variante precedente.
— 0 — 0 —

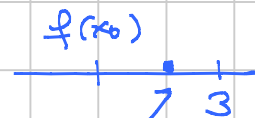
Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è SCI

(ii) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

(iii) esiste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_0) < 3$



Dim. Considero $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \frac{3+f(x_0)}{2}\}$
— 0 — 0 —

Oss. Stessa conclusione se assumo $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : f(x_0) = 3$

Infatti

- $\circ$ esiste pure $y_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(y_0) < 3 \leadsto$ come prima
- $\circ$ $f(x) \geq 3$ sempre $\leadsto 3$ è il minimo.

— 0 — 0 —

Supponiamo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cpt. e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
Quali sono candidati ad essere p.ti di max/min?
Tre categorie

① p.ti stazionari interni, cioè $x \in \text{Int}(K)$ t.c.

$$\nabla f(x) = 0 \quad (\text{sistema di } n \text{ equ. in } n \text{ incognite})$$

$\uparrow$
Deve esistere...

② p.ti singolari interni, cioè $x \in \text{Int}(K)$ t.c.

$\nabla f(x)$ non esiste.

③ p.ti $x \in \partial K$ (e questi sono sempre infiniti p.ti)

Dim. Sia x_0 p.to di max/min.

• Se sta in ② o ③, allora bene

• Se $x_0 \in \text{Int}(K)$ e $\nabla f(x_0)$ esiste, allora devo dedurre che

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Basta osservare che x_0 è p.to di max/min per le restrizioni alle rette $x_0 + te_i$.

Quindi se le derivate parziali esistono sono nulle per forza.

— 0 — 0 —

