

Esercizio 1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definita da
 $f(x) = |x|^2$.
 Calcolare $\nabla f(x)$ e $Hf(x)$.

Provo a derivarli da Taylor

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= |x_0 + R|^2 = |x_0|^2 + |R|^2 + 2 \langle x_0, R \rangle \\ &= |x_0|^2 + \langle 2x_0, R \rangle + |R|^2 \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad \begin{matrix} f(x_0) & \langle \nabla f(x_0), R \rangle & \frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = 2x_0 \quad Hf(x_0) = 2 \text{Id}$$

In alternativa: penso $f(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2$ e faccio i conti

Esercizio 2 Sia M una matrice qualunque, di dim. $n \times n$.
 Stessa cosa con la funzione

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle \quad \begin{matrix} \text{(si può scrivere anche se} \\ \text{M non è simmetrica)} \\ \uparrow \text{canonico} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \langle M(x_0 + R), x_0 + R \rangle = \langle Mx_0 + MR, x_0 + R \rangle \\ &= \underbrace{\langle Mx_0, x_0 \rangle}_{f(x_0)} + \underbrace{\langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle}_{\langle \nabla f(x_0), R \rangle} + \underbrace{\langle MR, R \rangle}_{\frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle x_0, MR \rangle \\ &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle M^t x_0, R \rangle \\ &= \langle (M + M^t) x_0, R \rangle \end{aligned}$$

da cui deduco che $\nabla f(x_0) = (M + M^t)x_0$

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle = (Mx)^t x = x^t M^t x = \langle x, M^t x \rangle$$

$$\langle Mx_0, R \rangle = (Mx_0)^t R = x_0^t M^t R = \langle x_0, M^t R \rangle$$

$$\langle x_0, MR \rangle = x_0^t MR = (M^t x_0)^t R = \langle M^t x_0, R \rangle$$

$$\langle MR, x_0 \rangle = (MR)^t x_0 = R^t M^t x_0 = \langle R, M^t x_0 \rangle$$

$$\begin{aligned} &= (R^t M^t x_0)^t = x_0^t M R \\ &= (M^t x_0)^t R \\ &= \langle M^t x_0, R \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle M^t x_0, R \rangle \\ &= \langle (M + M^t)x_0, R \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = (M + M^t)x_0$$

Per l'Hessiana devo scrivere $\langle MR, R \rangle = \frac{1}{2} R^t H_f(x_0) R$
↑
simmetrica!!!

Quello che lo fa funzionare è

$$H_f(x_0) = M + M^t \quad (\text{basta fare il conto!})$$

Osservazione finale Dall'inizio potevo scrivere

$$M = \underbrace{\frac{1}{2} (M + M^t)}_{\text{parte simm.}} + \underbrace{\frac{1}{2} (M - M^t)}_{\text{parte antisimm.}} = S + A$$

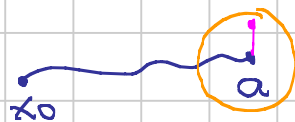
$$\text{A quel p.to} \quad \underbrace{\langle Mx, x \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle Sx, x \rangle}_{=0}$$

Esercizio 3 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso.

Allora D è connesso per archi, addirittura per archi C^1 o C^∞ .

Prendo $x_0 \in D$ e chiamo A l'insieme dei punti $a \in D$ per cui esiste un arco che congiunge x_0 ed a .

Fatto 1 : A è aperto : se da x_0 arrivo in a , poi arrivo in ogni punto di un intorno di a andando lungo il segmento. Se lo voglio C^∞ basta fare un raccordo



Fatto 2 : A è chiuso in D . Lo dim. con le succ.

Sia $\{a_n\} \subseteq A$ una succ. tale che $a_n \rightarrow a_\infty \in D$.
Devo dim. che $a_\infty \in A$.

Prendo una $B_\delta(a_\infty) \subseteq D$,
prendo un $a_n \in B_\delta(a_\infty)$, e ne ho infiniti a disposizione), e poi faccio il cammino



$x_0 \rightsquigarrow a_n \rightsquigarrow a_\infty$
 ↑ ↑
 esiste direttissima
 perché $a_n \in A$

Fatto 3 : $x_0 \in A$

Quindi $A \neq \emptyset$, A è aperto e chiuso in $D \Rightarrow A = D$ per connessione.

— o — o —

Esercizio 4 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Supponiamo che

$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Allora f è costante in D .

Dim. SE D fosse CONVESSO, allora sarebbe Lagrange direzionale.

Fisso $x_0 \in D$ e pongo

$$A := \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}$$

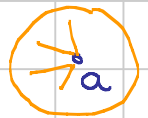
• Fatto 1 : $A \neq \emptyset$ ($x_0 \in A$)

• Fatto 2 : A è chiuso in D . Segue dalla continuità e dal fatto che

$$A = f^{-1}(\{f(x_0)\}) \quad (\text{controimmagine di un chiuso})$$

• Fatto 3 : A è aperto. Se $a \in A$, e $B_\delta(a) \subseteq D$, allora in $B_\delta(a)$ posso usare Lagrange direzionale

Per connessione $A = D$.



Variaute interessante Vale la stessa conclusione se assumo solo che f_x e f_y esistono e sono nulle in ogni p.to ?
(serve una specie di connessione per anch' // agli assi)

Esercizio 5 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
Sia $I = \text{immagine di } f$.

Allora tutti gli elementi di I , tranne al +2, sono assunti infinite volte, cioè

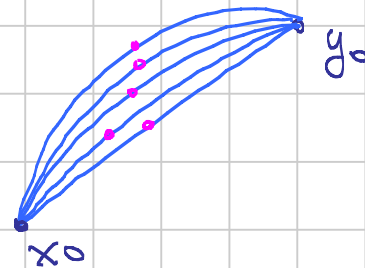
$f^{-1}(\{i\})$ ha infiniti elementi $\forall i \in I$
 $\uparrow$
con al max 2 eccezioni

Supponiamo che $i \in I$ non sia max/min.

Allora necessariamente

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : f(x_0) > i$$

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}^n : f(y_0) < i$$



Esistono infinite curve

continue che vanno da x_0 a y_0 senza intersecarsi se non negli estremi.

Su ogni curva c'è un pto in cui $f(x) = i$ e non è un estremo (basta considerare la restrizione)

Quindi le linee di livello o sono $\emptyset$, o hanno infiniti pti, o sono quelle che corrispondono a max/min.

Esercizio (HARD-HARD) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ .

Supponiamo che f abbia esattamente due punti di min. globale

Possiamo dire che ha almeno un altro pto stazionario?