

Ripasso forme quadratiche

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di grado 2, quindi un pol. di grado 2.
In simboli

$$q(x) := \sum_{|p|=2} a_p x^p$$

Esempi In dim. 2 sono tutte e sole quelle del tipo

$$q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$$

$$\text{Dim 3} \rightsquigarrow q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx$$

Scrittura matriciale A ogni forma quadratica posso associare una matrice M simmetrica t.c.

$$q(x) = x^t M x$$

$$ax^2 + by^2 + 2cxy \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$\text{Dim 3} \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$$

— o — o —

Def. Sia $q(x)$ una forma quadratica. Diciamo che è

- definita positiva se $q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- definita negativa se $q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$
- semidefinita negativa se $q(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$
- indefinita se non ricade in nessuna delle 4 precedenti e quindi

$$\exists v \in \mathbb{R}^m : q(v) > 0$$

$$\exists \omega \in \mathbb{R}^n : q(\omega) < 0.$$

Prop. principale Sia $q(x)$ una forma definita positiva.
Allora

$$\exists m > 0 \quad \text{take that} \quad q(x) \geq m |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Segnatura di una forma Ad ogni forma sono associati
3 indici con nomi vari

$$i_+, i_-, i_0 \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad i_+ + i_- + i_0 = n$$

definiti nel seguente modo

$$\rightarrow i_4 := \max \{ \dim(W) : W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ è s.sp. vet. e } q(w) \geq 0 \ \forall w \in W \}$$

$$\rightarrow i_- := \max \{ i \mid q(w) < 0 \}$$

$$\rightarrow i_0 = \dim \ker \text{matrix} = \dim \{x \in \mathbb{R}^m : y^t M x = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^m\}$$

Prop. Una forma è

- def. pos. $\Leftrightarrow i_+ = n$ (quindi $i_- = i_0 = 0$)
- semidef. pos $\Leftrightarrow i_- = 0$ (quindi $i_+ + i_0 = n$)
- def. neg. $\Leftrightarrow i_- = n$
- semidef. neg. $\Leftrightarrow i_+ = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow i_+ \geq 1$ e $i_- \geq 1$

Come si calcolano i 3 indici? Ci sono almeno 4 modi

① Faccio gli autovalori della matrice. Vengono reali perché è simmetrica. A quel punto

$$\begin{array}{lcl} i_+ = \# \text{ autov. positivi} \\ i_- = \# \text{ " neg.} \\ i_0 = \# \text{ " nulli} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} i_+ \\ i_- \\ i_0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{tenendo conto delle} \\ \text{multiplicità} \end{array}$$

Commento: praticamente molto scomodo

② Completamento dei quadrati: scrivo la forma come somma / differenza di $\square$ di termini lin. indep.

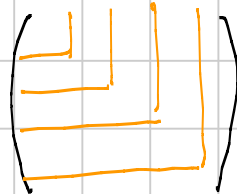
A quel punto

$$\begin{array}{l} i_+ = \# \text{ termini con segno +} \\ i_- = \# \text{ termini con segno -} \\ i_0 = \text{ciò che rimane} \end{array}$$

Esempio
$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 4xy &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y^2 \\ &= (x+2y)^2 - (\sqrt{2}y)^2 \end{aligned}$$

quindi $i_+ = i_- = 1$ e $i_0 = 0$.

③ Metodo dei minori orlati



Scrivo il segno del det. sulla diag. princ., metto un + a sx e guardo variazioni e permanenze di segno

i_-

i_+

aggiunto

Esempio: matrice 5×5 con segni

$$+ \begin{array}{c} | + + - + + \\ \hline p \quad p \quad v \quad v \quad p \end{array}$$

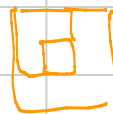
$i_+ = 3 \quad i_- = 2.$

Esempio matrice 6×6

$$+ \begin{array}{c} | + - 0 + - 0 \\ \hline + + - - \\ + + - - \end{array}$$

$i_0 = 1, i_+ = 2, i_- = 3.$

Oss. Posso procedere anche in dir. diversa



④ Cantesio: quando i coeff. $\neq 0$ del pol. caratteristico

i_0 = quando termine grado minimo

variazioni = i_+ , i_- = ciò che rimane

— 0 — 0 —

corretto dopo video

Dim. prop. principale

Dimostro che vale la tesi con

$$m := \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$$

↑ autovalori della matrice M .

Sappiamo che la matrice è simmetrica. Per il teo. spettrale

sappiamo che è diag. mediante matrice ortogonale, cioè esiste A t.c.

$$A M A^{-1} = D$$

A^t

$$A M A^t = D$$

oppure, che è lo stesso,

$$M = A^t D A$$

Ora

$$q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{x^t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula}}}{M} x = x^t A^t D A x = (Ax)^t D (Ax)$$

$$\begin{aligned} \text{però} \quad & \geq m |Ax|^2 \\ & = m |x|^2 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue da

$$|Ax|^2 = (Ax)^t Ax = x^t \underbrace{A^t A}_{\text{Id}} x = x^t x = |x|^2$$

Resta solo da dimostrare che

$$v^t D v \geq m |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

La matrice D ha sulla diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autov. di M .

Scritto $v = (v_1, \dots, v_n)$ otteniamo

$$v^t D v = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$$

$$\geq m (v_1^2 + \dots + v_n^2) = m |v|^2.$$

se
 $\lambda_i \geq m$
per ogni i

— o — o —

Def. Si definisce matrice Hessiana la matrice che ha come elementi le derivate seconde di una funzione di n variabili

$$(Hf(x_0))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$$

Sotto ip. ragionevoli è simmetrica e gioca il ruolo della derivata 2^a di analisi 1.

— o — o —