

Taylor (finale) $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\delta > 0$, $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_0 + h) = \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} h^p + r_n(h)$$

• (PEANO) Supponiamo che

→ le deriv. part. fino all'ordine $(n-1)$ esistono in $B_\delta(x_0)$

→ " " " " " " " " sono differ. in x_0

(in particolare $D^p f(x_0)$ esiste fino all'ordine $|p| \leq n$
e valgono i teoremi di scambio)

Allora

$$r_n(h) = o(|h|^n)$$

• (LAGRANGE) Supponiamo che

→ le deriv. part. fino all'ordine $(n+1)$ esistono in $B_\delta(x_0)$

→ avere ipotesi suff. per usare i te. di scambio fino all'ordine $(n+1)$, ad esempio tutte le deriv. part. fino all'ordine n diff. in $B_\delta(x_0)$.

Allora

$$r_n(h) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p f(c)}{p!} h^p$$

dove c sta sul segmento di estremi x_0 e $x_0 + h$ (ed è lo stesso per ogni p).

Caratterizzazione del polinomio di Taylor

Sotto le ipotesi date è l'unico $P(h)$, di grado $\leq n$, tale che

$$D^p P(0) = D^p f(x_0) \quad \forall |p| \leq n$$

Per dimostrare le formule, possiamo supporre per semplicità $x_0 = 0$ e considerare la funzione

$$\varphi(x) := f(x) - P(x)$$

la quale soddisfa

$$\boxed{D^p \varphi(0) = 0 \quad \forall |p| \leq n.} \quad (\star)$$

Lemma 4 (versione Peano) Supponiamo che $\varphi : B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$ abbia la regolarità prevista da Taylor - Peano e soddisfi $(\star)$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{|x|^m} = 0 \quad (\text{cioè } \varphi(x) = o(|x|^m))$$

Dim. Il caso $n=0$ è la def. di funzione continua.
Il caso $n=1$ è la def. di differenziale.

Per gli n successivi si procede per induzione.

Supponiamo la tesi vera per un certo n e dim. per $n+1$.

Sia φ che verifica le ipotesi di Taylor - Peano con ordine $n+1$.

Allora tutte le sue derivate prime soddisfanno hp di ordine n , dunque sono $o(|x|^m)$. Ma allora

$$|\nabla \varphi(x)| = o(|x|^m).$$

Ora per Lagrange - direzionale vale

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(0)| = \overset{\text{Lagrange}}{=} |\langle \nabla \varphi(c), x \rangle| \leq \overset{\text{C.S.}}{=} |\nabla \varphi(c)| \cdot |x|$$

Ora

$$\frac{|\varphi(x)|}{|x|^{n+1}} \leq \underbrace{\frac{|\nabla \varphi(c)|}{|c|^n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{|c|^n}{|x|^n}}_{\leq 1 \text{ perché } |c| \leq |x|} \frac{|x|}{|x|}$$



In alternativa, posso usare più la definizione.
 Dato $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ t.c.

$$|\nabla \varphi(y)| \leq \varepsilon |y|^m \quad \text{se } |y| \leq R$$

Ora concludo osservando che per $|x| \leq R$ vale

$$\frac{|\varphi(x)|}{|x|^{m+1}} \leq \frac{|\nabla \varphi(c)| \cdot |x|}{|x|^{m+1}} \leq \frac{\varepsilon |c|^m \cdot |x|}{|x|^{m+1}} \leq \frac{\varepsilon |x|^{m+1}}{|x|^{m+1}} = \varepsilon.$$

$\uparrow$
 $|c| \leq R$

Lemma 4 (Versione Lagrange) Supponiamo $\varphi: B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$ abbia la regolarità ... e soddisfi $(\star)$.

Allora per ogni $x \in B_\delta(x)$ esiste c sul segmento di estremi 0 ed x t.c.
 $\uparrow$ dipende da x

$$\varphi(x) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p \varphi(c)}{p!} x^p$$

(Se siamo in 2 variabili la dimostrazione è ragionevole)

"Dim" Fissato $x \in B_\delta(0)$, considero la funzione di una variabile

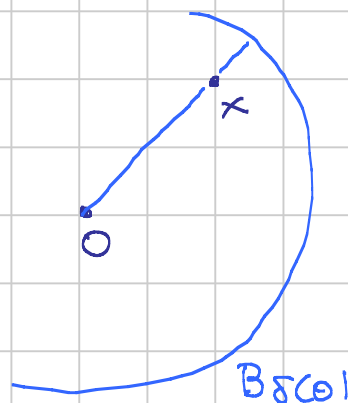
$$\psi(t) := \varphi(tx)$$

definita in un intorno di $[-1, 1]$

alla quale posso applicare il Taylor Lagrange di Analisi 1.

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^m \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\psi^{(m+1)}(t_0)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

da cui



$$\varphi(x) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!} \quad t_0 \in (0,1)$$

Per concludere devo calcolare le derivate di φ in funzione di quelle di φ usando la chain-rule.

La formula è

$$\varphi^{(k)}(t) = k! \sum_{|p|=k} \frac{D^p \varphi(tx)}{p!} x^p$$

Si dice, per involu. benino se $m=2$ (es. prec.) e malino per un generico (come il m-nomio di Newton)

Da questa formula segue la tesi (anzi qui non serve nemmeno l'ipotesi $(\star)$).

Il c richiesto è $t_0 x$.

— o — o —

Come calcolo praticamente i polinomi di Taylor? Analisi 1!!

Esempio 1 $f(x,y) = \sin(x+y) e^{xy} \quad n=4$

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + \underbrace{o((x+y)^4)}$$

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + o(|(x,y)|^4) \quad o(|(x,y)|^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$f(x,y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + xy(x+y) + o(p^4)$$

Esempio 2 $f(x,y) = y \arctan(x^2) + \sin(xy^2) \quad n=5$

$$f(x,y) = y(x^2 + o(x^2)) + xy^2 = yx^2 + xy^2 + o(p^5) \quad o((x^2+y^2)^{5/2})$$

Quale sarebbe il termine successivo?

Sarebbe $-\frac{1}{3}yx^6$, quello dopo $-\frac{1}{6}x^3y^6$

Esempio 3 Sia $f(x,y)$ come sopra.

Calcolare $\frac{\partial^8 f}{\partial x^6 \partial y^2}(0,0)$.

Banalmente 0, perché nel pol. di Taylor sarebbe il coeff. di $x^6 y^2$.
In questo caso tutte le derivate di ordine 8 si annullano.

Calcolare $\frac{\partial^7 f}{\partial x^6 \partial y}(0,0)$

Quando Taylor!

$$f(x,y) = \dots - \frac{1}{3} x^6 y + \dots = \frac{D^{(6,1)} f(0,0)}{(6,1)!} x^6 y$$

$$\leadsto D^{(6,1)} f(0,0) = -\frac{1}{3} \cdot (6,1)! = -\frac{1}{3} \cdot 6! = -240.$$

Esempio 4 $f(x,y) = \arctan(y \sin x)$ $n=4$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \arctan\left(y\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\right) \\ &= \arctan\left(xy - \frac{1}{6}x^3y + o(yx^4)\right) \\ &= xy - \frac{1}{6}x^3y + o(p^4) \end{aligned}$$

Se volessi $n=6$ dovrei aggiungere un termine nello sviluppo di $\sin x$ e tenere conto di $-\frac{1}{3}x^3y^3$ che arriva da $\arctan$.