

TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$f(x_0 + R) = \underbrace{\sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k}_{\text{pol. di Taylor di ordine } n} + \underbrace{r_n(R)}_{\text{resto}}$$

→ **PEANO** $r_n(R) = o(R^n)$, cioè $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r_n(R)}{R^n} = 0$

Ipotesi: f derivabile $(n-1)$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
 f derivabile n volte in x_0

→ **LAGRANGE** $r_n(R) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} R^{n+1}$ con c compreso tra x_0 e $x_0 + R$

Ipotesi: f derivabile $(n+1)$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Analisi 2 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$f(x_0 + R) = \underbrace{\sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} R^p}_{\text{pol. di Taylor di ordine } n \text{ con centro in } x_0} + \underbrace{r_n(R)}_{\text{resto}}$$

Per il resto esistono due versioni

→ **PEANO** $r_m(R) = o(|R|^m)$ cioè $\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \uparrow \text{limite in } n \text{ variabili}}} \frac{r_m(R)}{|R|^m} = 0$ ↑ norma

Ipotesi: • f ammette derivate

parziali di ordine fino a $(m-1)$ in $B_\delta(x_0)$

• Le derivate di ordine $(m-1)$ di f sono differenz. in x_0 .

→ **LAGRANGE** $r_m(R) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p f(c)}{p!} R^p$

dove c è un p.to sul segmento di estremi x_0 e $x_0 + R$

Ipotesi: f ammette derivate parziali fino all'ordine $(m+1)$ in $B_\delta(x_0)$.

— o — o —

FORMALISMO DEI MULTI-INDICI

Un multi-indice p è un vettore n -dim. a componenti naturali

$$p = (p_1, \dots, p_m) \quad p_i \in \mathbb{N}$$

Se p è multi-indice, allora

• $|p| := p_1 + \dots + p_m \in \mathbb{N}$

• $p! := p_1! \cdot \dots \cdot p_m!$

• Se $x \in \mathbb{R}^m$, allora $x^p := x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$

• Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$D^p f(x_0) := \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_m} f}{\partial x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial x_m^{p_m}}(x_0)$$

Scrittura dei primi termini di Taylor in dimensione 2 con centro in $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(0, 0) && \text{(ordine 0)} \\
 &+ f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y && \text{(ordine 1)} \\
 &+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] && \text{(ord. 2)} \\
 &+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{x^2y}(0, 0)x^2y + 3f_{xy^2}(0, 0)xy^2 \\
 &\quad + f_{yyy}(0, 0)y^3] && \text{(ordine 3)}
 \end{aligned}$$

Coeff. di f_{xx} è $\frac{1}{2!} = \frac{1}{(2, 0)!}$

" " f_{x^2y} è $\frac{3}{3!} = \frac{1}{2} = \frac{1}{(2, 1)!}$ $\frac{1}{3!} \frac{3!}{2!1!}$

Brutalmente, all'ordine n viene una specie di binomio di Newton, cioè il termine di ordine n è

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(0, 0) x^i y^{n-i} \binom{n}{i} \\
 &= \sum_{|p|=n} \frac{D^p f(0, 0)}{p!} (x, y)^p
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{n!} \binom{n}{i} = \frac{1}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{(i, n-i)!}$

" $= \frac{1}{n!} (x\partial_x + y\partial_y)^n$ "

In 3 o più variabili, si tratta di fare la potenza del trinomio o peggio.

$$(x_1 + \dots + x_m)^k = \sum_{|p|=k} \frac{k!}{p!} x^p$$

Multinomio di Newton scritto con i multi-indici

Dimostrazione di Taylor

Lemma 1 (Derivata di un monomio)

$$D^q x^p(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq p \\ p! & \text{se } q = p \end{cases} \quad (p \text{ e } q \text{ sono multi-indici})$$

Dim. Calcolare $D^q x^p$ è equivalente a calcolare

$$\frac{\partial^{q_1}}{\partial x_1^{q_1}} x_1^{p_1} \cdots \frac{\partial^{q_m}}{\partial x_m^{q_m}} x_m^{p_m} \quad \text{e poi è analisi 1.}$$

Lemma 2 (Derivata di un polinomio)

Sia $P(x)$ un polinomio in n variabili, che scrivo come

$$P(x) = \sum_{|p| \leq d} a_p x^p$$

↑ grado del polinomio (confermato dopo video)

Allora

$$(D^p P)(0) = p! a_p$$

Dim. Segue dal Lemma del monomio.

Lemma 3 (Caratterizzazione dei polinomi di Taylor)

Sia $P(x) := \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} x^p$. Allora

$$D^p P(0) = D^p f(x_0) \quad \forall p \text{ con } |p| \leq n$$

Dim. Segue dal Lemma del polinomio.

A questo punto si pone

$$\varphi(\mathbf{R}) := f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}) - P(\mathbf{R})$$

e si osserva che tutte le derivate parziali di φ si annullano in $\mathbf{0}$ fino all'ordine n , cioè

$$D^p \varphi(\mathbf{0}) = 0 \quad \forall p \text{ con } |p| \leq n.$$

Lemma (alla Lagrange) Se φ ammette derivate fino all'ordine $(n+1)$ e quelle fino all'ordine n si annullano, allora

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p \varphi(\mathbf{c})}{p!} \mathbf{R}^p$$

con $\mathbf{c}$ compreso tra $\mathbf{0}$ ed $\mathbf{R}$

Caso speciale in cui siamo in 2 variabili: $\varphi(\mathbf{R}, \mathbf{k})$

Pongo $\psi(t) := \varphi(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t)$ (funzione di 1 variabile)
e osservo che

$$\varphi(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = \psi(1) = \sum_{i=0}^n \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!} \underset{\substack{\uparrow \\ t=1}}{t^i} + \frac{\psi^{(n+1)}(\mathbf{c})}{(n+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ t=1}}{t^{n+1}}$$

conetto dopo video

Cui sono le derivate di ψ ? CHAIN RULE!

$$\psi'(t) = \varphi_x(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R} + \varphi_y(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{k}$$

$$\psi''(t) = \varphi_{xx}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R}^2 + 2\varphi_{xy}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R}\mathbf{k} + \varphi_{yy}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{k}^2$$

: per induzione

$$\psi^{(J)}(t) = \sum_{i=0}^J \frac{\partial^J \varphi}{\partial x^i \partial y^{J-i}}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R}^i \mathbf{k}^{J-i} \quad \text{da cui la tesi.}$$