

CHAIN RULE = Derivate (parziali delle funzioni composte)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) & & (y_1, \dots, y_m) \end{array} \quad \varphi = g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Sotto opportune ipotesi vale

$$J\varphi(x_0) = Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0)$$

Insiduiamo con $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ le componenti di φ . Allora

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

anche se compaiono solo der. parziali, serve come ipotesi la differenziabilità

Dim. $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x_0) = (J\varphi(x_0))_{k,i}$
 $\uparrow$ k -esima riga, i -esima colonna

(prodotto righe per colonne)

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m (Jg(f(x_0)))_{k,j} \cdot (Jf(x_0))_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x_0)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0). \end{aligned}$$

Caso speciale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ t & & x_1, \dots, x_n \end{array}$$

$$\varphi = g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Analisi 1!!}$$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(t)) \cdot f_i'(t)$$

Caso ultra speciale

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x, y, z)$$

$$\varphi(t) = g(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad \text{Allora}$$

$$\varphi'(t) = g_x(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \cdot f_1'(t) + g_y(\dots) \cdot f_2'(t) + g_z(\dots) f_3'(t)$$

Esempio

$$g(x, y) = x^2 - xy^3$$

$$\varphi(t) = g(\sin t, t^2)$$

1° modo

$$\varphi(t) = \sin^2 t - t^6 \sin t$$

$$\varphi'(t) = 2 \sin t \cdot \cos t - 6t^5 \sin t - t^6 \cos t$$

2° modo

Provo ad usare la formula

$$g_x = 2x - y^3, \quad g_y = -3xy^2$$

$$\varphi'(t) = g_x(\sin t, t^2) \cdot \cos t + g_y(\sin t, t^2) \cdot 2t$$

$$= (2 \sin t - t^6) \cos t + (-3 \sin t \cdot t^4) \cdot 2t$$

$$= 2 \sin t \cdot \cos t - t^6 \cdot \cos t - 6 t^5 \cdot \sin t \quad \text{☺}$$

Esempio 2

$$f(x, y)$$

$$f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = g(x, y)$$

$$g_x(x, y) = f_x \varphi_x + f_y \psi_x = f_x(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \varphi_x(x, y) + f_y(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \psi_x(x, y)$$

$$g_y(x, y) = f_x \varphi_y + f_y \psi_y = [\text{esplicitare}]$$

$$g_{xx}(x, y) = (f_x)_x \varphi_x + f_x (\varphi_x)_x + (f_y)_x \psi_x + f_y (\psi_x)_x$$

$$= (f_{xx} \varphi_x + f_{xy} \psi_x) \varphi_x + f_x \varphi_{xx} + (f_{yx} \varphi_x + f_{yy} \psi_x) \psi_x + f_y \psi_{xx} = \text{esplicitare} \dots$$

Per esercizio scrivere g_{xy} e g_{yy} .

Gradiente in coordinate polari

Sia $f(x, y)$ una funzione di 2 variabili. Pongo

$$g(p, \theta) := f(p \cos \theta, p \sin \theta)$$

Domanda: legame tra f_x, f_y e g_p, g_θ

Calcolo le derivate (parziali) di g in funzione di quelle di f .

$$\begin{aligned} g_p &= f_x x_p + f_y y_p = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{CHAIN RULE} \\ &= f_x(p \cos \theta, p \sin \theta) \cos \theta + \dots \end{aligned}$$

$$g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = f_x \cdot (-p \sin \theta) + f_y \cdot (p \cos \theta)$$

Ora calcolo

$$\begin{aligned} (g_p)^2 + \frac{1}{p^2} (g_\theta)^2 &= f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + f_x^2 \sin^2 \theta + f_y^2 \cos^2 \theta - 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Conseguenza:

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = (g_p)^2 + \frac{1}{p^2} (g_\theta)^2$$

Formula del
gradiente in
coord. polari

Eslicitando le dipendenze, la formula diventa

$$[f_x(p \cos \theta, p \sin \theta)]^2 + [f_y(p \cos \theta, p \sin \theta)]^2 = [g_p(p, \theta)]^2 + \frac{1}{p^2} [g_\theta(p, \theta)]^2$$

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x$ $\nabla f(x, y) = (2x - 3, 2y)$

$$|\nabla f(x, y)|^2 = 4x^2 - 12x + 9 + 4y^2$$

$$g(\rho, \theta) = \rho^2 - 3\rho \cos \theta$$

$$g_\rho = 2\rho - 3\cos \theta$$

$$g_\theta = 3\rho \sin \theta$$

$$g_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} g_\theta^2 = (2\rho - 3\cos \theta)^2 + 9 \sin^2 \theta$$

$$= \overbrace{4(x^2+y^2)}^{4(x^2+y^2)} - \overbrace{12x}^{12x} + \overbrace{9\cos^2 \theta + 9\sin^2 \theta}^9$$

$$= |\nabla f(x,y)|^2 \text{ riscritto in coord. polari}$$

Esempio PDE 1 (Partial Differential Equation)

Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f_x(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

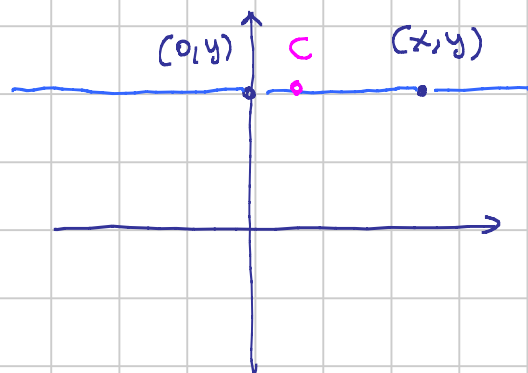
Risposta: sono tutte le funzioni della sola y , cioè quelle del tipo

$$f(x,y) := g(y)$$

Lo dimostro con un Lagrange direzionale sulle rette // asse x

Ossevo che

$$f(x,y) - f(0,y) \stackrel{0}{=} x \cdot \overbrace{f_x(c,y)}^{\text{Lagr. direz.}} = 0$$



Quindi abbiamo dim. che

$$f(x,y) = f(0,y) =: g(y)$$

In modo equivalente posso considerare la restrizione $\varphi(t) = f(t,y)$ e osservare che $\varphi'(t) = 0$.

Esempio PDE 2 Trovare tutte le $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Risposta: sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x,y) = g(x+y)$$

è ovvio che vanno bene,
ma non è ovvio che sono
le uniche

Idea: dimostrare che f è costante sulle rette del tipo $x+y = \lambda$
cioè sulle rette // alla bisettrice del II e IV quadrante

$$\gamma: (x_0+t, y_0-t) \quad \varphi(t) = f(x_0+t, y_0-t)$$

$$\varphi'(t) = \text{CHAIN RULE}$$

$$= f_x(x_0+t, y_0-t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x_t}}{1} +$$

$$+ f_y(x_0+t, y_0-t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y_t}}{-1} = 0$$

$\Rightarrow \varphi$ non dipende da t e quindi

$$f(x_0, y_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } t=y_0}}{f(x_0+y_0, 0)} =: g(x_0+y_0)$$

Posso assegnare come mi pare f sull'asse x e da estendere
a tutto $\mathbb{R}^2$ rispettando l'equazione.

Oss. Anche se g fosse omibile (non derivabile) possiamo pensare
 $f(x,y) = g(x+y)$ come una qualche soluz. di $f_x = f_y$.

