

Caso particolare di disuguaglianza di Lagrange direzionale

Supponiamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con componenti $f_1, \dots, f_m$
 In questo caso

$$J = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix} \quad \downarrow m \quad = f'(t)$$

$$\text{Tesi: } |f(b) - f(a)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{|f'(t_0)|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero}}}{(b-a)} = |f'(t_0)| \cdot |b-a|$$

Dim Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ pensato come colonna considero

$$\varphi(t) = \langle f(t), v \rangle = v_1 f_1(t) + \dots + v_m f_m(t)$$

Applico Lagrange di Analisi 1 a $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= (b-a) \varphi'(t_0) \\ &= (b-a) (v_1 f_1'(t_0) + \dots + v_m f_m'(t_0)) \\ &= (b-a)^t v J \\ &= {}^t v J (b-a) \end{aligned}$$

$\uparrow$ è un numero

da cui

$$\langle f(b) - f(a), v \rangle = |{}^t v J (b-a)| = |b-a| \langle v, J \rangle$$

Prendo $v = f(b) - f(a)$ e ho

$$|f(b) - f(a)|^2 = |b-a| \langle f(b) - f(a), J \rangle \\ \leq |b-a| \cdot |f(b) - f(a)| \cdot |f'(t_0)|$$

Se $f(b) = f(a)$ non avevo nulla da dimostrare
Altrimenti divido e ho la tesi

— o — o —

Corollario Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$

Supponiamo che

(i) D aperto e convesso

(ii) f diff. su D

(iii) la matrice jacobiana Jf è limitata su D , cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad |Jf| \leq M.$$

Allora f è M -Lip. su D .

Dim. Uso disug. Lagrange direz.

Prop. norme matrici

$$|f(y) - f(x)| \leq |Jf(c)(y-x)| \leq |Jf(c)| \cdot |y-x|$$

vettore
lungo M

↑
Disug.
Lagrange

$$\leq M \cdot |y-x|$$

↑
vettore lungo n

— o — o —

Achtung! Se f è diff. su D e $|Jf| \leq M$ su D
ma D non è convesso, non posso
dedurre che f è M -Lip.

Non è vero nemmeno se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

In certi casi è "quasi vero" : $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $|\nabla f| \leq M$ limitato.



Posso dedurre che è Lip. anche se con una costante $> M$ perché posso fare il giro

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f(w)| + |f(w) - f(z)| + |f(z) - f(x)| \\ &\leq M|y-w| + M|w-z| + M|z-x| \\ &\leq 3M|y-x| \end{aligned}$$

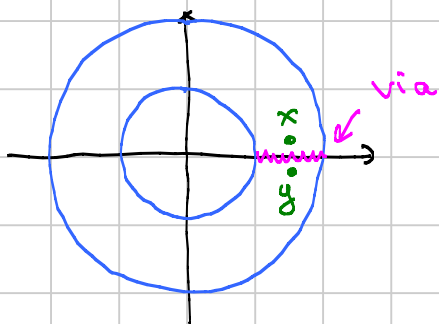
Quello che vale sempre è

$$|f(y) - f(x)| \leq M \cdot \underbrace{\text{dist}(y, x)}$$

"
lunghezza della + corta
spezzata che congiunge
y e x restando in D.

Esempio perverso 1

$D =$ corona circolare meno un raggio



$f(x, y) = \theta$ delle coord. polari

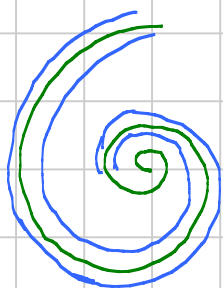
Questa ha $|\nabla f|$ limitato, ma non è Lip. !!!

(Basta prendere x e y vicinissimi come in figura $f(y) \sim 2\pi$ $f(x) \sim 0$)

Esempio perverso 2

D limitato, $|\nabla f|$ limitato

$\Downarrow \leftarrow$ NO !!!
 f limitata



Basta prendere f che sale lentamente in un intorno di una spirale di lunghezza infinita.

DIFF. DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Analisi 1: $[g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Teorema Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$
 $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ $E \subseteq \mathbb{R}^m$

Supponiamo

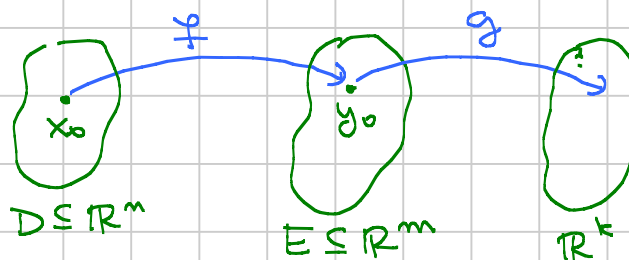
$x_0 \in D$ aperto

$y_0 = f(x_0) \in E$ aperto

$f(D) \subseteq E$

f diff. in x_0 con $Jf(x_0)$

g diff. in y_0 con $Jg(y_0)$



Allora $g \circ f$ è diff. in x_0 e

$$J(g \circ f)(x_0) = Jg(y_0) \cdot Jf(x_0)$$

osservare che le dim. sono compatibili

Dim. Sia $\varphi(x) = g(f(x))$ la composizione.

Ipotesi

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + Jf(x_0)R + |R| \underbrace{w_f(R)}_{\substack{0 \\ \uparrow \text{ per } R \rightarrow 0}}$$

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + Jg(y_0)k + |k| \underbrace{w_g(k)}_{\substack{0 \\ \hookrightarrow \text{ per } k \rightarrow 0}}$$

Posso supporre che $w_f(R)$ sia definita anche per $R=0$ e valga 0. Stesso discorso per $w_g(k)$.

$$\varphi(x_0 + R) = g(f(x_0 + R))$$

$$= g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f(x_0 + R) - f(x_0)}_{k})$$

$$= \boxed{g(f(x_0))} + Jg(y_0) [f(x_0+h) - f(x_0)] + |f(x_0+h) - f(x_0)| \cdot \omega_g(f(x_0+h) - f(x_0))$$

$\downarrow$
 y_0

$$Jg(y_0) [f(x_0+h) - f(x_0)] = Jg(y_0) [Jf(x_0)h + |h| r_f(h)]$$

$$= \boxed{Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0) \cdot h} + Jg(y_0) |h| r_f(h)$$

$$+ \boxed{Jg(f(x_0)) |h| r_f(h)}$$

Ci serve che i restanti due termini siano $o(|h|)$.
Vediamo il 2°

$$|Jg(f(x_0)) |h| r_f(h)| \leq |Jg(f(x_0))| \cdot |h| \cdot |r_f(h)|$$

e quindi quando divido per $|h|$ tende a 0 grazie a $|r_f(h)|$

Per quanto riguarda il 1°, basta dire che

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \text{ è limitato (a quel punto il prodotto tende a 0 per merito di } \omega_g(\dots))$$

$$= \frac{1}{|h|} |Jf(x_0)h + |h| r_f(h)|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} (|Jf(x_0)h| + |h| \cdot |r_f(h)|)$$

$$\leq |Jf(x_0)| \cdot |h|$$

$$= |Jf(x_0)| + |r_f(h)| \quad \text{no limitato.}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 fisso 0

Consiglio Ripetere la dim. scrivendo i vari oggetti cosa sono (matrici / vettori e di quali dimensioni).