

Cosa diventa il teorema di Lagrange per funzioni di più variabili

Def. (Norma di una matrice) Data una matrice M di dim $n \times n$ poniamo

$$\|M\| = \left(\sum_{i,j} M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

↑
el. della matrice

Prop. Sia M matrice $n \times n$, sia $v \in \mathbb{R}^n$.
Allora $Mv \in \mathbb{R}^n$ e vale la stima

$$|Mv| \leq \|M\| \cdot |v|$$

↑
norma in n variabili
↑
norma in $n \cdot n$ variabili
↑
norma in n variabili

Dim. Siano $R_1, \dots, R_n$ le righe di M . Allora

$$(Mv)_i = \langle R_i, v \rangle \quad \text{quindi}$$

↑
comp. i -esima

$$|(Mv)_i|^2 \leq |R_i|^2 \cdot |v|^2$$

↑
c.s.

Ma allora

$$|Mv|^2 = \sum_{i=1}^n |(Mv)_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |R_i|^2 \cdot |v|^2 = |v|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |R_i|^2$$

$$= |v|^2 \cdot \|M\|^2$$

— 0 — 0 —

Corollario Le funzioni affini sono Lipschitziane

Dim Una funzione $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ affine si scrive come

$$\varphi(x) = Ax + b \quad A \text{ matrice, } b \text{ vettore}$$

Quindi $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |Ax + b - Ay - b|$

$$= |A(x-y)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{norma della matrice}}}{|A|} \cdot |x-y|$$

— o — o —

Teorema (Lagrange direzionale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, siano $a \in A$ e $b \in A$ due punti.

Supponiamo che

(i) tutto il segmento di estremi a e b è contenuto in $\text{Int}(A)$

(ii) f ammette derivate direzionali in $\text{Int}(A)$.

Allora esiste almeno un pto c nel segmento di estremi a e b tale che

$$f(b) - f(a) = |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(c) \quad \text{con } v = \frac{b-a}{|b-a|}$$

Dim Considero la restrizione di f alla retta passante per a e b

$$t \rightarrow a + \overset{v}{\frac{b-a}{|b-a|}} t$$

$$\begin{aligned} t=0 &\rightsquigarrow a \\ t=|b-a| &\rightsquigarrow b \end{aligned}$$

$\varphi(t) := f(a + vt)$ è una funzione di 1 variabile a cui applico Lagrange di AN.1

$$f(b) - f(a) = \varphi(|b-a|) - \varphi(0) = |b-a| \varphi'(t_0)$$

$$\begin{aligned} &= |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(a + vt_0) \\ &= |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(c). \end{aligned}$$

Corollario Nelle stesse ipotesi di prima, supponiamo in aggiunta che f sia differenziabile.
Allora la tesi diventa

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b-a \rangle$$

dove c sta sul
segmento di estremi
 a e b

Dim. $f(b) - f(a) = |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(c) \quad \text{con } v = \frac{b-a}{|b-a|}$

$$= |b-a| \langle \nabla f(c), v \rangle$$
$$= |b-a| \langle \nabla f(c), \frac{b-a}{|b-a|} \rangle = \langle \nabla f(c), b-a \rangle.$$

Prop Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto **convesso** (se contiene 2 p.ti, contiene tutto il segmento)
e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f er diff. in D ,

(ii) ∇f è limitato su D , cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|Df(x)| \leq L \quad \forall x \in D.$$

Allora f è lip. con costante M in D .

Dim. Uso Lagrange direzionale

$$|f(y) - f(x)| = |\langle \nabla f(c), y-x \rangle| \leq |\nabla f(c)| \cdot |y-x|$$

↑
↑
sul
c.s.
segmento

$$\leq M |y-x|.$$

10101

Achtung! Lagrange direzionale non vale se la funzione è a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$.

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(t) := (\cos t, \sin t)$
 $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$
quindi $f'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Tuttavia $\underbrace{f(2\pi) - f(0)}_{=0} \stackrel{?}{=} 2\pi \cdot \underbrace{f'(0)}_{\neq 0}$

Proposizione Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme convesso.
Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione
Siano a e b due p.ti distinti di D .
Supponiamo che f sia diff. in D e sia J la sua matrice jacobiana.

Allora esiste c sul segmento di estremi a e b tale che

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq |J(c)(b-a)|} \quad \begin{array}{l} \text{Disuguaglianza} \\ \text{di Lagrange direzionale} \end{array}$$

Dim. (Dimostrazione per dualità)

Sia $v \in \mathbb{R}^m$ un qualunque vettore. Considero la funzione

$$D \ni x \rightarrow \langle f(x), v \rangle \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ prod. scalare in $\mathbb{R}^m$

Così ho definito una funzione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \langle f(x), v \rangle$$

Per questa funzione vale il Lagrange direzionale, quindi

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle \nabla \varphi(c), b-a \rangle$$

Cui è $\nabla \varphi$? Siano $f_1(x), \dots, f_m(x)$ le componenti di f .
Siano $v_1, \dots, v_m$ le comp. di v

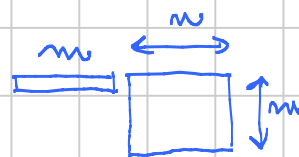
Allora

$$\varphi(x) = v_1 f_1(x) + \dots + v_m f_m(x)$$

da cui

$$\nabla \varphi(x) = v_1 \nabla f_1(x) + \dots + v_m \nabla f_m(x) = v J$$

$\uparrow$ prima riga di J $\uparrow$ m -esima riga di J



Sostituendolo otteniamo

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle v J(c), b-a \rangle$$

$\uparrow$ riga $\uparrow$ matrice $\uparrow$ colonna

da cui

$$\langle f(b), v \rangle - \langle f(a), v \rangle = \langle v J(c), b-a \rangle$$

"

$$\langle f(b) - f(a), v \rangle = \langle v J(c), b-a \rangle$$

Uso come vettore $v = f(b) - f(a)$ e ottengo

$$\begin{aligned}
 |f(b) - f(a)|^2 &= \langle (f(b) - f(a)) J(c), b-a \rangle \\
 &= \langle f(b) - f(a), J(c)(b-a) \rangle \\
 &\leq |f(b) - f(a)| \cdot |J(c)(b-a)|
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ c.s.

Semplice (se posso) $|f(b) - f(a)|$ e ottengo

$$|f(b) - f(a)| \leq |J(c)(b-a)|$$

$\uparrow$ vettore $\text{da } m$. $\uparrow$ matrice $m \times n$ $\uparrow$ colonna lunga n