

Relazioni tra differenziabilità, derivabilità, continuità

Setting : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$.

Consideriamo le seguenti proprietà

- (i) f è continua in x_0 ,
- (ii) esistono deriv. part. in x_0 ,
- (iii) esistono tutte le deriv. direz. in x_0 ,
- (iv) f è differenziabile in x_0 .

Teorema

$$(iii) \Rightarrow (ii)$$

(ovvio)

$$(iv) \Rightarrow (i) + (ii) + (iii)$$

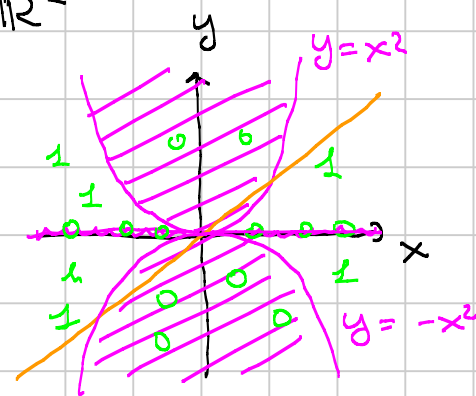
Ancora più importante: tutto il resto è falso, in particolare

$$(iii) \not\Rightarrow (i)$$

(Brutalmente = (iii) è come ragionare solo sulle rette)

Esempio 1 (Semplice, ma burocratico) $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{su asse } x + \text{parabole} \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$$



Tutte le deriv. direz. in $(0,0)$ esistono e sono $=0$, perché la restrizione ad ogni retta è $=0$ vicino all'origine

D'altra parte $\left. \begin{array}{l} f(t, \frac{1}{2}t^2) \rightarrow 1 \text{ per } t \rightarrow 0 \\ f(t, 0) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0 \end{array} \right\} f \text{ non è cont. in } (0,0)$

Esempio 2 (Menu semplice e menu burocratico)

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Visto molte volte che non è continua in $(0,0)$.

Vediamo che tutte le deriv. direzionali esistono e sono $= 0$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\alpha R, \beta R) - f(0,0)}{R} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left(\frac{\alpha^2 \beta R^3}{\alpha^4 R^4 + \beta^2 R^2} \right)^2$$

→ se $\beta \neq 0$ allora denom. $\sim R^2$ e $\lim = 0$

→ se $\beta = 0$, ancora meglio.

Oss. Il $\square$ serve solo a rendere il limite $= 0$.

Dim. teorema

$$(i0) \Rightarrow (i) \quad f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

$$f(x_0 + R) - f(x_0) = \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

$$|f(x_0 + R) - f(x_0)| \leq |\langle \alpha, R \rangle| + |o(|R|)|$$

$$\leq |\alpha| \cdot \boxed{|R|} + \frac{\boxed{|o(|R|)|}}{\boxed{|R|}} \cdot \boxed{|R|}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x_0 + R) = 0.$$

$$(iv) \Rightarrow (iii) \quad f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

Presa una qualunque direzione v vado a calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} && \text{(uso def. di diff. con } R = tv \text{)} \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + \langle \alpha, tv \rangle + o(|tv|) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \langle \alpha, v \rangle + \underbrace{\frac{o(|tv|)}{|tv|}}_0 \underbrace{\frac{|tv|}{t}}_{\text{numero fisso}} = \langle \alpha, v \rangle$$

Formula per le derivate direzionali

Se f è diff. in x_0 , allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \alpha, v \rangle \quad \forall v \neq 0$$

Usando come v i vettori della base canonica otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i \quad (\text{i-esima comp. di } \alpha)$$

Quindi $\alpha = \nabla f(x_0)$ e in conclusione

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle} \quad \text{Formula per deriv. direzionali se } f \text{ è diff. in } x_0$$

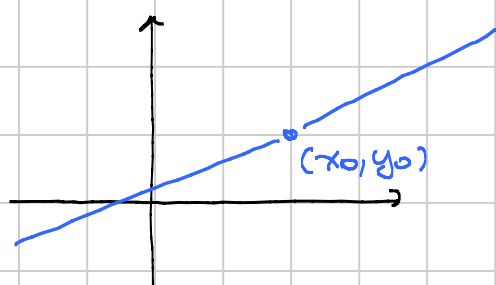
Achtung! Può succedere che f soddisfa (iii), ma le deriv. direz. non sono date dalla formula
(Basta prendere l'esempio 2 senza il quadrato)

Significato geometrico del gradiente

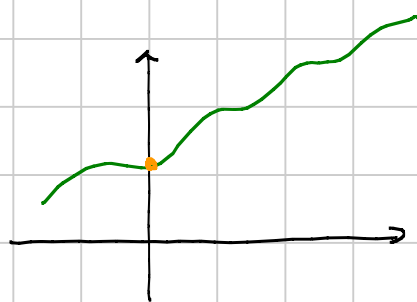
Calcoliamo der. direz. di una funzione ad vettori $|v|=1$. Allora

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = | \langle \nabla f(x_0), v \rangle | \leq |\nabla f(x_0)| \cdot |v| = 1$$

La deriv. direz. è max se v è l'unico multiplo positivo di $|\nabla f(x_0)|$ che abbia norma 1.



$(x_0, y_0) + t v$



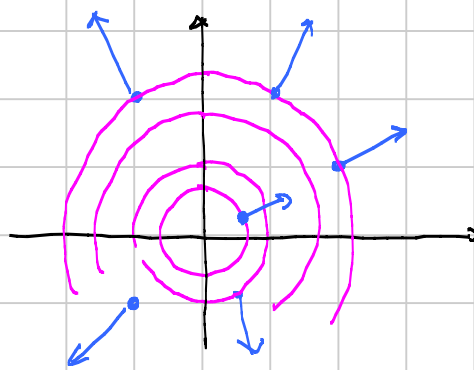
$f((x_0, y_0) + t v)$

quota a cui
si trova
l'unico che
percorre la
retta

$\nabla f(x_0)$ è la direzione in cui andare per salire il più possibile

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$

Il gradiente è $\perp$ alle linee di livello $f(x, y) = \lambda$ e punta nella direzione λ sale



— o — o —

Domande

① Come calcolo le deriv. parziali

② " " " " direzionali

(se so fare ③ e ①, per queste c'è la formula)

③ Come stabilisco se f è diff. in x_0 .

Le derivate parziali si calcolano "congelando la variabile rispetto alla quale non derivo"

Esempi

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$f_x(x,y) = 2x$$

$$f_y(x,y) = 3y^2$$

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

$$f_x(x,y) = 2xy^3$$

$$f_y(x,y) = 3x^2 y^2$$

$$f(x,y) = x \sin(xy^2)$$

$$f_x(x,y) = \sin(xy^2) + x \cos(xy^2) y^2$$

$$f_y(x,y) = x \cos(xy^2) \cdot 2xy$$

$$f(x,y) = x^y$$

$$f_x(x,y) = y x^{y-1}$$

$$f_y(x,y) = x^y \log x$$

Esempio

$$f(x,y) = x^3 + x^2 y^4$$

Metto una pallina nel p.to sopra (2,1). Dove va la pallina?

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^4$$

$$f_y(x,y) = 4x^2 y^3$$

$$\nabla f(2,1) = (16, 16)$$

