

Derivate e differenziale per funzioni di più variabiliAnalisi 1

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Differenziale

Teo  $f$  è deriv. in  $x_0 \Leftrightarrow f$  è diff. in  $x_0$  (e  $\alpha = f'(x_0)$ )

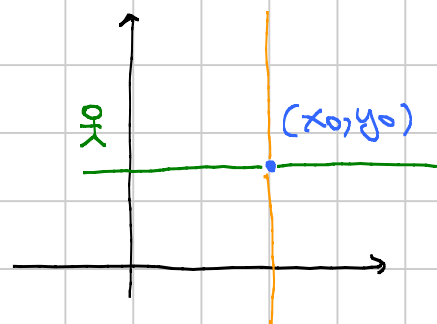
Analisi 2

Caso di 2 variabili.

Setting:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in \text{Int}(\Omega)$

$$\text{♀} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\text{♂} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Def. Si dice che  $f(x, y)$  è derivabile parzialmente rispetto alla variabile  $x$  nel p.to  $(x_0, y_0)$  se il 1° limite esiste ed è reale. Il valore del limite si chiama derivata parziale risp. ad  $x$  e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0)$$

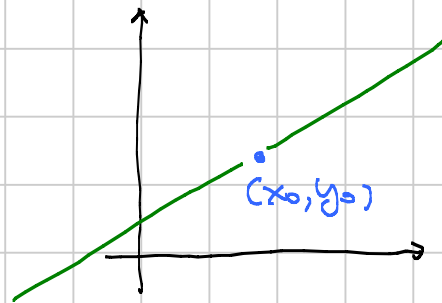
Analogamente, il secondo limite produce  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

— o — o —

Def. (derivata direzionale)

Siano  $\Omega, f, (x_0, y_0)$  come prima.

Sia  $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  non nullo, cioè  
 $\alpha^2 + \beta^2 > 0$



Considero

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha \alpha, y_0 + \beta \alpha) - f(x_0, y_0)}{\alpha}$$

(osservo che la retta è  $(x_0, y_0) + \alpha(\alpha, \beta)$ )

Se il limite esiste ed è reale, allora si dice deriv. direz. di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  risp. al vettore  $v$  e si indica con

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)} \quad f_v(x_0, y_0)$$

Oss. 1 Spesso si def. le deriv. direzionali usando solo  $v$  che sono versori, cioè  $|v| = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ .  
Infatti è semplice osservare che per  $\lambda > 0$  vale

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

↑  
equivale a percorrere la stessa retta con una diversa velocità

Oss. 2 Le derivate parziali sono deriv. direz. corrispondenti a  $v = (1, 0)$  e  $v = (0, 1)$ .

Oss. 3 Le deriv. parz. e direz. sono derivate di restrizioni di  $f$ , cioè ad esempio

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi'(x_0) \quad \text{dove} \quad \varphi(x) := f(x, y_0)$$

Def. (in dim  $n$ ) Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
sia  $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$

$\uparrow$  vettore

• Dato  $v \in \mathbb{R}^n$  con  $|v| > 0$ , abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha v) - f(x_0)}{\alpha} \quad (\text{se esiste})$$

$\uparrow$  numero

• Dato  $i \in \{1, \dots, n\}$  def. la deriv. part. risp. a  $x_i$  come

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha e_i) - f(x_0)}{\alpha}$$

dove  $e_i$  è l' $i$ -esimo vett. della base canonica

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } i.}}{1}, 0, \dots, 0)$$

— 0 — 0 —

Def. Si dice gradiente di  $f$  nel pto  $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$   
il vettore che ha come componenti le deriv.  
parziali di  $f$  nel punto  $x_0$ .

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

$\uparrow$   
NABLA

Oss. (quasi teorema) Se  $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$  è pto di max / min  
per  $f$ , e  $\nabla f(x_0)$  esiste (cioè esistono le deriv. parziali),  
allora

$$\nabla f(x_0) = 0 \quad (\text{sono } n \text{ equazioni})$$

Idem per le derivate direzionali.

Dim.  $x_0$  è pto di max / min per tutte le restrizioni.  
— 0 — 0 —

## DIFFERENZIALE

In 2 variabili  $f(x, y)$  stesso setting.

Def. Si dice che  $f$  è diff. in  $(x_0, y_0)$  se esistono  $\alpha$  e  $\beta$  tali che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Oss. L'enorme differenza è che l'o-piccolo implica una funzione  $r(h, k)$  tale che

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

↑ limite in 2 variabili

In  $n$  variabili diventa:  $f$  è diff. in  $x_0$  se  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$  t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \alpha, h \rangle + o(|h|)$$

↑  
vettori

↑  
prod. scalare  
di vettori

↑  
norma di  
un vettore

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$$

↑  
limite in  $n$  variabili

Oss. La funzione  $h \rightarrow \langle \alpha, h \rangle$  è un'applicazione lineare in  $\mathbb{R}$ , quindi posso ridire la definizione dicendo che  $f$  è diff. in  $x_0$  se esiste un'applic. lineare

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(|h|)$$

Ancora più in generale, siano

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \text{Int}(\Omega), \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

si dice che  $f$  è diff. in  $x_0$  se esiste un'appl. lineare

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(|h|)$$

Diagram illustrating the differential approximation formula with annotations:

- $f(x_0 + h)$ : vettore  $m$ -dim.
- $f(x_0)$ : vettore  $m$ -dim.
- $L$ : matrice  $m \times n$
- $h$ : vettore  $n$ -dim.
- $o(|h|)$ :  $n(h)$

Limit condition:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|n(h)|}{|h|} = 0$$

Annotations for the limit:

- $|n(h)|$ :  $m$  var.
- $|h|$ :  $n$  var.

Oss. Torniamo in 2 variabili

$$f(\underbrace{x_0 + h}_x, \underbrace{y_0 + k}_y) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o(|(h, k)|)$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o(|(x - x_0, y - y_0)|)$$

eq. del piano tangente al grafico di  $f(x, y)$  nel pto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Discorso analogo in  $n$  variabili

— o — o —

Per il futuro: sotto ipotesi decenti sarà

$$\alpha = \nabla f(x_0)$$

Nel caso di  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la matrice  $L$  sarà la matrice JACOBIANA definita da

$$Jf(x_0) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}$$

Annotations:

- $i$  -esima comp. di  $f$
- $j$  -esima variabile