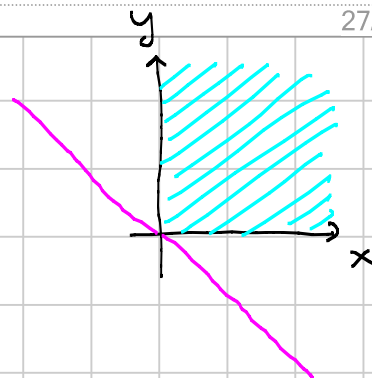
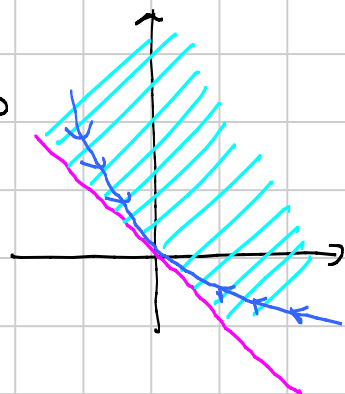


Esempio 1

Il limite viene 0


$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\rho^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta}{\rho (\cos \theta + \sin \theta)} = \frac{\rho^5}{\rho \cdot \omega} = \frac{\rho^4}{\omega}$$

Esempio 2 Stesso limite con D def. da $x+y > 0$



Ora posso fare $f(t, -t+t^{20})$ e

come alla les. prec. ottengo $\text{liminf} = -\infty$

$$e \text{ limsup} = +\infty$$

Esempio 3

- Coe $D = \mathbb{R}^2$ N.E.

- Con $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$

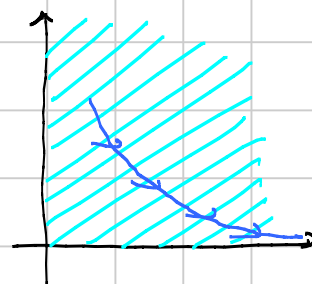
$$\limsup = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

$$\text{living} = 0$$

$f(x,y) \geq 0$ sempre in D

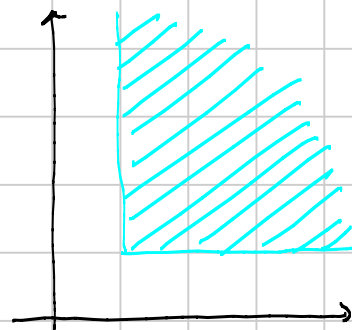
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, \frac{1}{t^2}) = 0$$



• Con $D = (1, +\infty) \times (1, +\infty)$

Coord. polari $\rho^2 \cos \theta \sin \theta$
 ≥ 0

Dico che il limite fa $+\infty$



$$xy = \frac{1}{2} \underset{y \geq 1}{xy} + \frac{1}{2} \underset{x \geq 1}{xy} \geq \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} (x+y)$$

vera all'interno di D

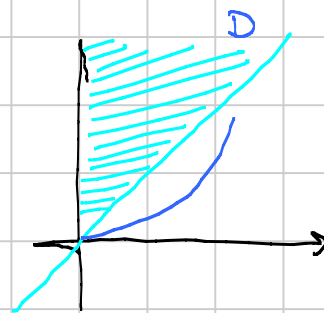
Ora osservo che $\lim_{\substack{x+y \rightarrow +\infty \\ x \geq 0 \\ y \geq 0}} x+y = +\infty$ perché lo posso fare in polari

$$(x+y = \rho(\cos \theta + \sin \theta) \geq \underset{\text{pos.}}{m} \rho)$$

Catena logica

$x+y \rightarrow +\infty$ sul 1° quadrante $\Rightarrow x+y \rightarrow +\infty$ sul D ristretto
 $\Rightarrow xy \rightarrow +\infty$ sul D ristretto

Esempio 4 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$



$$\underset{0}{\uparrow} 0 \leq \frac{xy^2}{x^4+y^2} \leq \frac{y^3}{y^2} = \underset{0}{\uparrow} y$$

Nella zona D vale $y \geq x$, cioè $x \leq y$

Esempio 5 $f(x,y) = y^{20} + \arctan(xy)$ $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$

$\limsup = +\infty$

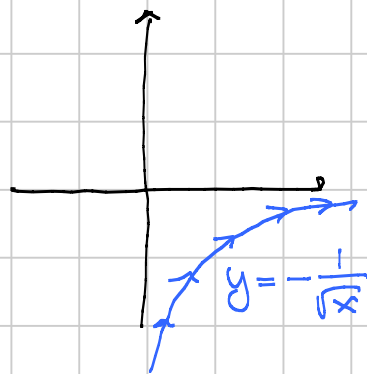
$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = +\infty$

(andava bene anche $t \rightarrow +\infty$)

$$\liminf = -\frac{\pi}{2} \quad f(x,y) \geq -\frac{\pi}{2} \text{ sempre}$$

$$f(t^2, \frac{1}{t}) = \frac{1}{t^{20}} + \arctan(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t^2, \frac{1}{t}) = -\frac{\pi}{2}$$



Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{x-y} = 1$

Pongo $x-y=t$ e osservo che quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ si ha che $t \rightarrow 0$, quindi diventa il limite notevole

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{x-2y}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \frac{1}{2}$$

$$f(2t+t^{20}, t) = \frac{\sin(t+t^{20})}{t^{20}}$$

Da qui si vede che $\liminf$ e $\limsup$ sono $\pm \infty$

Esempio 8 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\sin c \underset{0}{=} 0$

Lagrange!

$$\cos x - \cos y = (x-y) (-\sin c)$$

misterioso tra x e y

Esempio 9 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x^3 y^9}{x^{66} + y^{40}}$

nel 1° quadrante

Pareggiare gli esponenti: pongo

$$x = u^{40}$$

$$y = v^{66}$$

Osservo che, essendo nel 1° quadrante,

$$x^2 + y^2 \rightarrow +\infty \quad (\Rightarrow) \quad u^2 + v^2 \rightarrow +\infty$$

Sostituendo trovo

$$\frac{x^3 y^a}{x^{66} + y^{40}} = \frac{u^{120} v^{66a}}{u^{40 \cdot 66} + v^{40 \cdot 66}}$$

$$40 \cdot 66 = 2640$$

Ora passo in polari e ottengo

$$\frac{\rho^{120+66a} \boxed{\cos^{120} \theta \sin^{66a} \theta}}{\rho^{2640} (\cos^{2640} \theta + \sin^{2640} \theta)} \leq 1$$

$\geq m$

Quindi il limite viene 0 quando $120 + 66a < 2640$

Per gli altri valori di a uso omini del tipo (t^{40}, mt^{66}) e ottengo lim. diversi per m diversi.

Oss. Quando $(x_n, y_n) \rightarrow (2, 5)$ posso dedurre $x_n \rightarrow 2$ e $y_n \rightarrow 5$
Quando $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow +\infty$ posso dedurre che $|x_n| \rightarrow +\infty$ opp. $|y_n| \rightarrow +\infty$

NO! Si può andare spiraleggiando o peggio!!

