

LIMITI ALL'INFINITO IN PIÙ VARIABILI

Vuol dire fare il limite per $\|x\| \rightarrow +\infty$
 $\uparrow$
 Vettore

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ N.E & \textcircled{4} \end{cases} \quad (\text{come sempre})$$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

- ② $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$
- ③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \leq M$
- ④ $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Def. Sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una successione. Si dice che x_k "tende all'infinito" se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = +\infty$$

cioè $\forall R > 0$ si ha che $x_k \notin B_R(0)$ definitivamente.

Esempio 1 $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} x^2 + 2y^2 - 3x = +\infty$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2 + 2y^2 - 3x$$

1° metodo: mi concentro delle disuguaglianze.

Considero $\frac{x^2}{2} - 3x$. Da analisi 1 sappiamo che

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{x^2}{2} - 3x \geq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$
negativa

Ora vale la stima

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 3x &\geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \underbrace{\frac{x^2}{2} - 3x}_{\geq M} \\ &\geq \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\rightarrow +\infty} + M \end{aligned}$$

2° metodo: uso delle coordinate polari: $x = p \cos \theta$, $y = p \sin \theta$

Oss. fond.: fare il lim per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ equivale a fare il limite per $p \rightarrow +\infty$

$$x^2 + 2y^2 - 3x = p^2 \cos^2 \theta + 2p^2 \sin^2 \theta - 3p \cos \theta$$

NON POSSO CONSIDERARE θ COME UN PARAMETRO E FARE IL LIMITE $p \rightarrow +\infty$. MI DEVO LIBERARE DI θ !!!

$$\begin{aligned} &\geq p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta - 3p \cos \theta \\ &= p^2 - 3p \cos \theta \\ &\geq \boxed{p^2 - 3p} \end{aligned}$$

quindi la funzione $\xrightarrow{+\infty}$ iniziale tende a $+\infty$

Detto meglio: $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $p^2 - 3p \geq M$ per $p \geq R$
e quindi $x^2 + 2y^2 - 3x \geq M$ quando
 $\sqrt{x^2 + y^2} \geq R$

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 + 3xy^2$

In coord polari ottengo

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + 3\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

Distinguo 2 casi

- Se $\cos \theta \neq 0$, allora il ρ^4 vince e il limite viene $+\infty$
- Se $\cos \theta = 0$, allora $\sin^2 \theta = 1$ e la funzione diventa $\rho^2 \rightarrow +\infty$

Quindi in ogni caso tende a $+\infty$.

SPAZZATURA (Analisi riciclata = fare il limite sulle rette).

Il limite sopra NON ESISTE !!!

Per vederlo ci sono almeno 2 modi

- $f(t, t^2) = t^4 + t^4 + 3t^5$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = +\infty$$

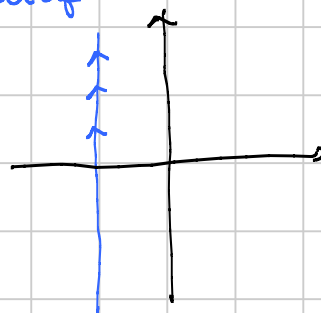
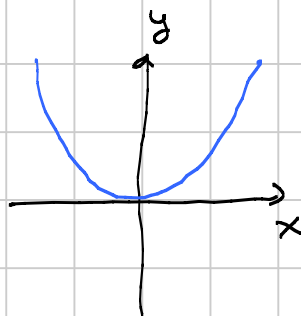
$\downarrow$
limsup

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, t^2) = -\infty$$

$\downarrow$
liminf

- $f(-1, t) = 1 + t^2 - 3t^2 = 1 - 2t^2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-1, t) = -\infty \Rightarrow \text{no esist. lim.}$$



Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 + x^2y = +\infty$

1° modo: invento disuguaglianze

$$x^4 + y^2 + x^2y = \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y)^2 \geq \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Osservo che $x^4 \geq x^2 - 1$ (vera per $|x| \geq 1$ e per $|x| \leq 1$)
da cui

$$\frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$\downarrow$
 $+\infty$

2° modo: pareggio gli esponenti con un cambio di variabili

Pongo $x = u$, $y = v^2$. Ottengo

$$x^4 + y^2 + x^2 y = u^4 + v^4 + u^2 v^2$$

e qui è evidente che è una somma di quadrati.

Oss. Così come è scritto è pericoloso perché y assume solo valori positivi. Si sistema, ma non è banale.

Esempio 4 $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} x^4 + y^4 + 12x^2y = +\infty$

Uso coord. polari

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta + 12\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$= \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + 12\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\geq m \rho^4 - 12\rho^3 \rightarrow +\infty$$

dove $m := \min \{ \cos^4 \theta + \sin^4 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \}$

Analisi 1: il minimo esiste ed è il valore assunto in un certo θ_0 (p.to di min.), e questo valore non è 0 perché $\sin \theta_0$ e $\cos \theta_0$ non possono essere entrambi nulli.

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^5}{x^6 + y^6}$

In coordinate polari è come fare il lim per $\rho \rightarrow 0^+$

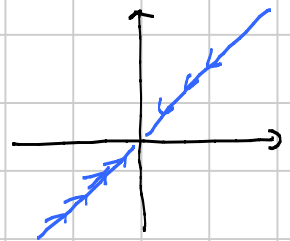
$$\left| \frac{x^2 y^5}{x^6 + y^6} \right| = \frac{\rho^7 |\cos^2 \theta \sin^5 \theta|}{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \frac{\rho^7}{\rho^6 \cdot m} \rightarrow 0$$

dove

$$m := \min \{ \cos^6 \theta + \sin^6 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \} > 0$$

↑
come prima

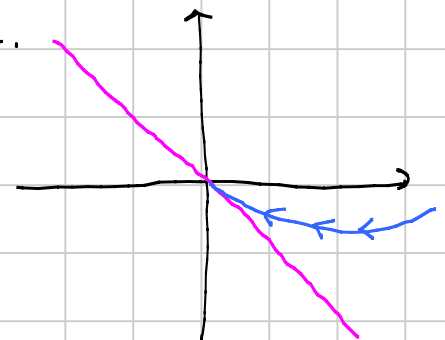
Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^6 + y^6}$ N.E.



$$f(t, t) = \frac{t^5}{2t^6} = \frac{1}{2} \frac{1}{t}$$

per $t \rightarrow 0^+$ tende a $+\infty$ (limsup)
per $t \rightarrow 0^-$ tende a $-\infty$ (liminf)

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x + y}$ N.E.



$$(t, -t + t^{20})$$

$$f(t, -t + t^{20}) = \frac{t^2 (-t + t^{20})^3}{t^{20}}$$

$$\sim -\frac{t^5}{t^{20}} = -\frac{1}{t^{15}} \quad \text{per } t \rightarrow 0$$