

Come visualizzare funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e il loro grafico:

→ linee di livello

→ percorsi di omini.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

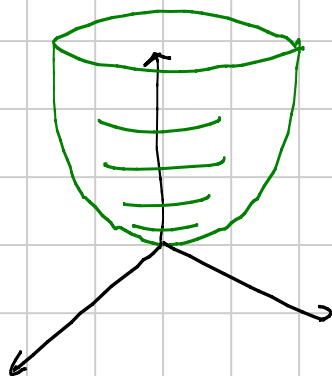
Linee di livello: $f(x, y) = \lambda$ (studio di insieme al variare di λ)

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

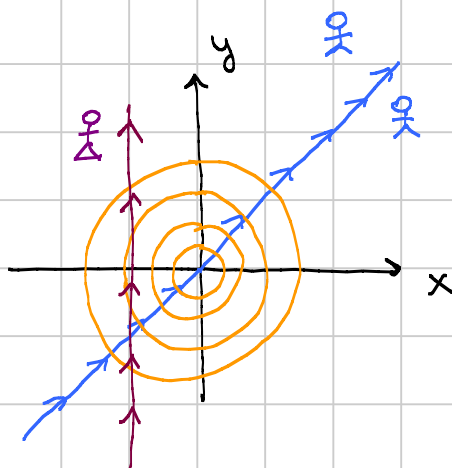
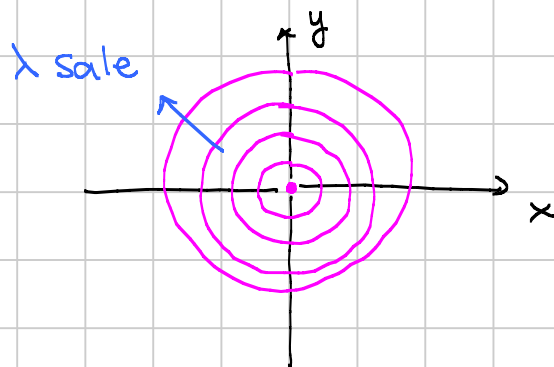
$\leadsto \emptyset$ se $\lambda < 0$

$\leadsto (0, 0)$ se $\lambda = 0$

$\leadsto$ circ. di raggio $\sqrt{\lambda}$ e centro in $(0, 0)$ se $\lambda > 0$



Percorso di omini



(t, t) $t \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 tempo

$f(t, t) =$ quota a cui si trova l'omino che nella cartina fa il percorso stabilito (t, t)
 $= t^2 + t^2 = 2t^2$

$(-1, t)$

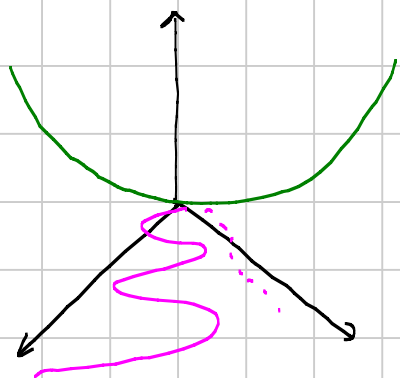
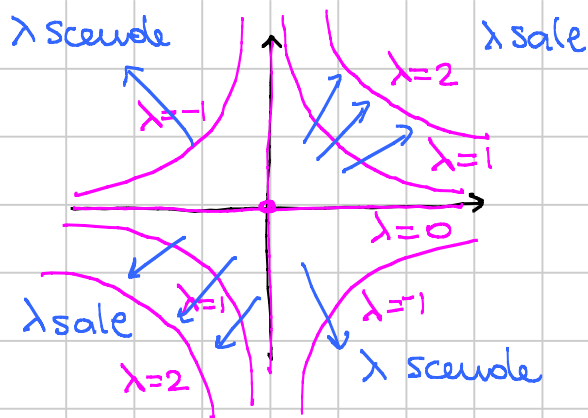
$$f(-1, t) = 1 + t^2$$

Esempio 2 $f(x,y) = xy$

Linee di livello : $xy = \lambda$

$\hat{f}(t,t) : f(t,t) = t^2$ 

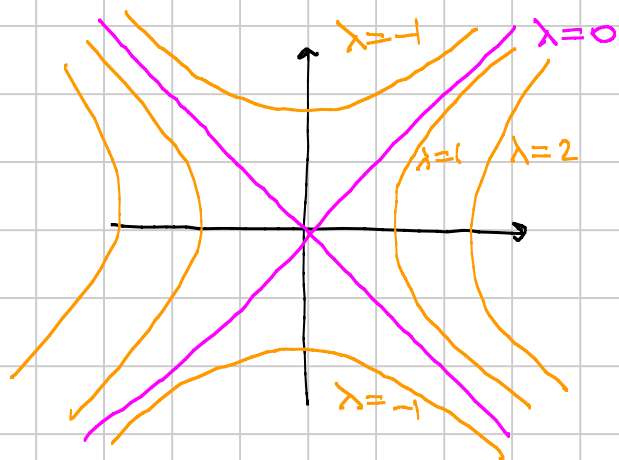
$\hat{f}(t,-t) : f(t,-t) = -t^2$ 



Mountain pass.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 - y^2$

È quella di prima ruotata di 45° 😊



Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ $\left[\frac{0}{0} : \text{forma indet.} \right]$

Lo dimostro con il trucco del valore assoluto + carabinieri

$$0 \leq \underbrace{\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right|}_{\downarrow 0} = |y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\downarrow 0} \leq |y| \downarrow 0$$

Esempio 5

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$\left[\frac{0}{0} \right]$

Non esiste

Lo dimostro usando omini diversi che vanno a $(0,0)$ in modo diverso

① Mi muovo lungo asse x : $(t,0)$ con $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

② Mi muovo lungo bisettrice

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

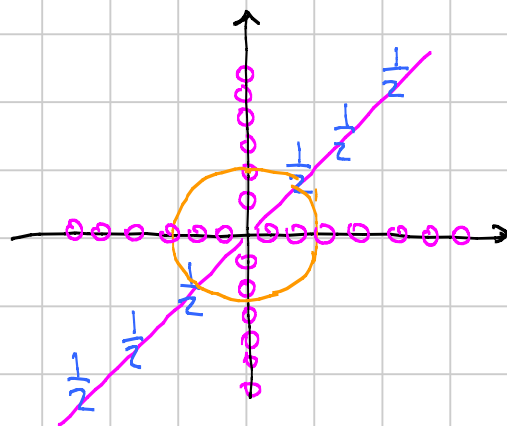
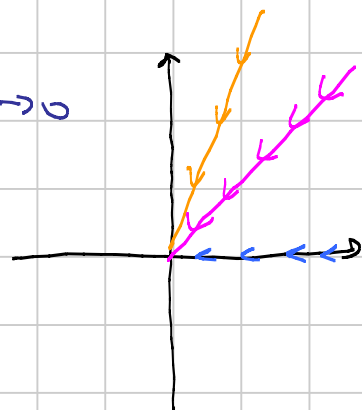
③ Lungo la retta $y = mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot mt}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Omini diversi ottengono limiti diversi, ANZI
abbiamo scoperto che $f(x,y)$ è costante
sulle rette che escono dall'origine

Quindi: in ogni palla
centrata in $(0,0)$
ci sono pti in cui
 $f = \frac{1}{2}$ e pti in cui $f = 0$

$\Rightarrow$ il lim. non può esistere



Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot mt}{t^2 + m^4 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt}{1 + m^4 t^2} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| = |y| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq |y|$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \text{N.E.}$

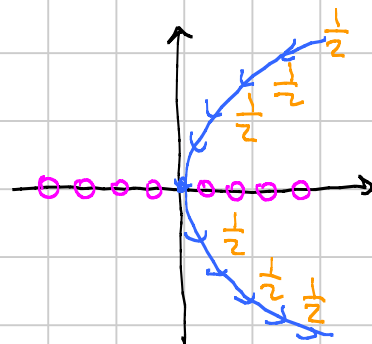
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot m^2 t^2}{t^2 + m^4 t^4} = 0 \text{ come prima}$$

(Bisogna fare a parte l'asse y, ma viene facile)

Considero il cammino (t^2, t)

$$f(t^2, t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

e quindi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2} \neq 0$.



Più in generale : $f(mt^2, t) = \frac{m}{m^2 + 1} \Rightarrow f$ è costante lungo le parabole

MORALE

- ① Come dimostro che un limite non esiste? Trovo 2 cammini che vedono limiti diversi
- ② Come dimostro che un limite esiste? Devo inventarmi qualcosa. GLI OMINI NON BASTANO