

Precorso	20%
Analisi 1	40%
Alg. Lin.	10%
Analisi 2	30%

Programma:

- Calc. diff. in + variabili
- Calc. int. " " "
- Calc. vettoriale (curve e sup.)
- Varietà
- Spazi metrici
- Succ. e serie di funzioni
- Eq. e sistemi di eq. diff.

] corso di
 servizio
 (CALCULUS)

] Secondo
 semestre

Riassunto in una parola: UNIFORME (MENTE)

— o — o —

Studieremo di funzioni $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m=1$)

↓ rende le cose difficili

Ripasso di $\mathbb{R}^m$:

→ $\mathbb{R}^m$ è uno sp. vett. $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ *not. vett.*

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
 $(x_1, x_2, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8$

] *not. con
 componenti*

→ Prodotto scalare canonico

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$$

Proprietà:

- bilineare
- def. positivo $\langle x, x \rangle \geq 0$ sempre e $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

→ Norma di un vettore (lunghezza)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

"Pitagora in n variabili"

Proprietà :

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

→ Distanza. Dati x e y in $\mathbb{R}^n$ si definisce

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

Proprietà

- (d1) $d(x, y) \geq 0$ sempre
- (d2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (d3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

→ Topologia (intorni, aperti, chiusi, ...)

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) < r\}$$

↑ BALL
↑ centro
↑ raggio

APERTA

$$\bar{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) \leq r\}$$
 CHUISA

Da qui nascono i concetti topologici, ad esempio dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diciamo

- $x_0 \in \text{Int}(A)$ se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A$
- $x_0 \in \text{Clos}(A)$ se $\forall r > 0$ vale $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$
- $x_0 \in D(A)$ se $\forall r > 0$ vale $(B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
 $\uparrow$ p.to di accumul.

Analogamente tutto il resto

Metaidea

prod. scalare $\rightsquigarrow$ norma $\rightsquigarrow$ distanza $\rightsquigarrow$ intornoi $\rightsquigarrow$ succ. conv.

Def. Sia x_n una successione di vettori e sia x_∞ un vettore (diciamo tutto in $\mathbb{R}^m$).

Diciamo che $x_n \rightarrow x_\infty$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, x_\infty) = 0$$

limite di numeri

Analogamente posso dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x_n \in B_\varepsilon(x_\infty) \text{ definitivamente.}$$

Setting Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
Il grafico di f è

$$\text{Grafico}(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : y = f(x) \}$$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \nearrow & \downarrow \\ n \text{ comp} & 1 \text{ comp.} & \mathbb{R} & \mathbb{R}^m \end{matrix}$

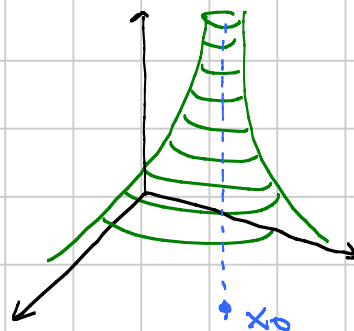
Def. di limite Sia x_0 un p.to di accumulazione di A .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1}$$
$$+\infty \quad \textcircled{2}$$
$$-\infty \quad \textcircled{3}$$
$$\text{N.E.} \quad \textcircled{4}$$

④ Nessuno dei precedenti 😊

② $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$



③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

④ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$\underbrace{|f(x) - l|}_{\text{valore assoluto di numeri}} \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

— o — o —

Più in generale se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D(A)$

Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}^m$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \underbrace{\|f(x) - y_0\|}_{\text{norma di un vettore}} \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

Esempio $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,3) \\ \text{componenti}}} \underbrace{\frac{y \arctan x}{x^2 + x e^{yx}}}_{f(x,y)} = \frac{3 \arctan 2}{4 + 2e^6}$

Buona notizia 😊 : vale il solito metateorema di analisi 1 quando non ci sono problemi burocratici

Cattiva notizia ☹️ : ad ANALISI 2 I LIMITI NON HANNO NESSUNA VOGLIA DI ESISTERE