

Dim. convergenza dominata detto Fatou

Ipotesi $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \int_{\mathbb{X}} g(x) d\mu < +\infty$

Si dimostra più in generale che

$$\int_{\mathbb{X}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n(x) d\mu$$

ovvia $\rightarrow \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n(x) d\mu$

$$\leq \int_{\mathbb{X}} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu$$

Se esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (PUNTUALE), allora RHS e LHS coincidono, quindi coincide tutto.

Le due disuguaglianze "laterali" sono quasi Fatou.

- Quella con il $\limsup$ è la variante di Fatou e sfrutta la dominazione

$$f_n(x) \leq g(x) \quad (\text{Dominat. dall'alto})$$

- Quella con il $\liminf$ è il Fatou classico applicato a

$$\varphi_n(x) := f_n(x) + g(x)$$

Queste sono ≥ 0 perché $f_n(x) \geq -g(x)$ (Dom. dal basso).

— 0 — 0 —

Dim. convergenza monotona $f_n(x) \geq 0$ $f_n(x) \uparrow$

Tesi: $\int \underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)}_{f_\infty(x)} d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n(x) d\mu$

$\supseteq$ Facile perché $f_\infty(x) \geq f_n(x) \quad \forall x \in \dots \quad \forall n \in \dots$
quindi

$$\int f_\infty(x) d\mu \geq \int f_n(x) d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e ora basta fare il sup in $\mathbb{N}$.

$\leq$ Volendo posso supporre che $RHS < +\infty$ (altrimenti è banale)
Sia $\varphi: X \rightarrow [0, +\infty]$ una qualunque step function
con immagine finita con $\varphi(x) \leq f_\infty(x)$. Diciamo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

per opportuni c_k e $A_k \subseteq X$ disgiunti misurabili.
Voglio dimostrare che

$$\int \varphi(x) dx \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n(x) dx.$$

In realtà mi basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\int \varphi(x) dx \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (1+\varepsilon) \int f_n(x) dx$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ pongo

$$A_{k,n}^\varepsilon := \{x \in A_k : (1+\varepsilon)f_n(x) \geq c_k\}$$

Osservo che $A_{k,n}^\varepsilon$ è crescente rispetto ad n (f_n sono $\uparrow$)

e

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{k,m}^{\varepsilon} = A_k$$

(basta osservare che $\subseteq$ è banale e inoltre ogni $x \in A_k$ finisce definitivamente in $A_{k,m}^{\varepsilon}$ perché
 $(1+\varepsilon)f_n(x) \rightarrow (1+\varepsilon)f_{\infty}(x) > c_k$ per $x \in A_k$)

Ora pongo $\varphi_m^{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{(m)} c_k \mathbb{1}_{A_{k,m}^{\varepsilon}}(x)$

e osservo che $\varphi_m^{\varepsilon}(x) \leq (1+\varepsilon)f_m(x)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$
 banale per def. di $A_{k,m}^{\varepsilon}$

Concludo

disug. sopra
 $\sup_{m \in \mathbb{N}} (1+\varepsilon) \int_{\mathbb{X}} f_m(x) d\mu \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} \varphi_m^{\varepsilon}(x) d\mu$

(def. di out.) $= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{(m)} c_k \mu(A_{k,m}^{\varepsilon}) \right)$

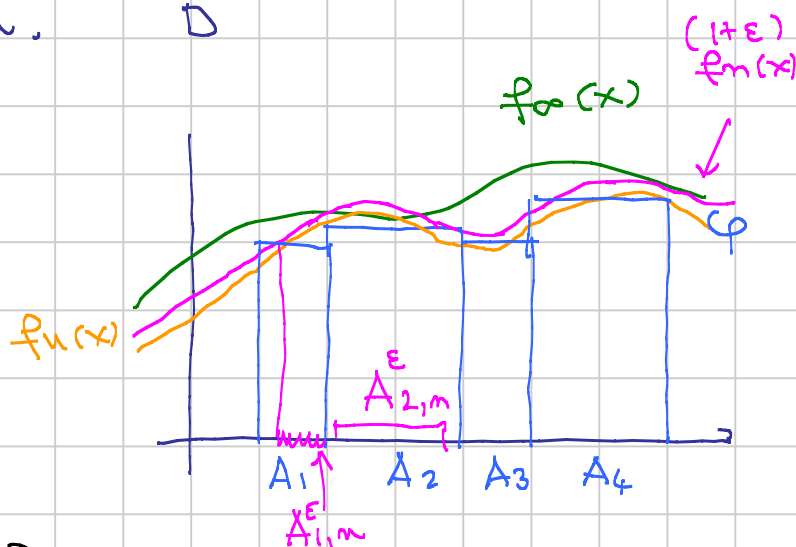
$$= \sum_{k=1}^{(m)} c_k \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_{k,m}^{\varepsilon})$$

(teo. passaggio al limite sulla misura)
 $= \sum_{k=1}^{(m)} c_k \mu(A_k)$

$$= \int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\mu. \quad \square$$

Disegno spero esplicativo

Rialzo le $f_n(x)$ di $(1+\varepsilon)\varphi_m$ usando stesse altezze c_k ma basi ristrette.



Back to analysis 2

Teoremi di continuità e derivabilità
per integrali dipendenti da parametro.

(X, m, μ) sp. di misura, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$f: (a, b) \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

e poniamo
$$\varphi(t) := \int_X f(t, x) d\mu(x)$$

 $\uparrow$ integrale su X

Teorema 1 (Continuità) Setting come sopra

Supponiamo che

(i) per ogni $t \in (a, b)$ la funzione $x \rightarrow f(t, x)$ è misurabile,

(ii) per ogni $x \in X$ la funzione $t \rightarrow f(t, x)$ è continua
in (a, b) ,

(iii) esiste $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

$$\int_X g(x) d\mu < +\infty$$

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall x \in X$$

Allora $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Dim. Prendo una qualunque succ.

$$(a, b) \ni t_n \rightarrow t_\infty \in (a, b)$$

e mostro che $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t_\infty)$, cioè

$$\int_X \overbrace{f(t_n, x)}^{f_n(x)} d\mu(x) \rightarrow \int_X \overbrace{f(t_\infty, x)}^{f_\infty(x) = \text{limite puntuale}} d\mu(x)$$

e questo è vero per conv. dominata $\square$

Teorema 2 Stesso setting.

Supponiamo che

(i) stesso (i) di prima

(ii) per ogni $x \in X$ la funzione $t \rightarrow f(t, x)$ è derivabile in (a, b)

(iii) per ogni $t \in (a, b)$ l'integrale $\int_X f(t, x) d\mu(x) \in \mathbb{R}$

(iv) esiste $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ t.c.

$$\int_X g(x) d\mu < +\infty$$

$$|f_t(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall x \in X$$

Dominazione
della
derivata

Allora $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e vale

$$\varphi'(t) = \int_X f_t(t, x) d\mu(x) \quad \forall t \in (a, b)$$

Dim. Prendo $t_0 \in (a, b)$, prendo una succ. $h_n \rightarrow 0$ e mostro che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t_0 + h_n) - \varphi(t_0)}{h_n} = \int_X f_t(t_0, x) d\mu(x)$$

L'argomento del LHS è

$$\int_X \frac{f(t_0 + h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} d\mu(x)$$

$g_n(x)$

e $g_n(x) \rightarrow f_t(t_0, x)$ PUNTUALMENTE

Se trovo una dominazione per $g_n(x)$ sono ok

$$|g_n(x)| = |f_t(\text{qualche parte}, x)| \leq g(x) \text{ per la dominazione}$$

— o — o —

Per il futuro, cito 2 teo. importanti

Teo 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana.

Allora esiste $E \subseteq \mathbb{R}$ con misura di Lebesgue nulla tale che

$f'(x)$ esiste per ogni $x \notin E$.

Teo 2 Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (localmente).

Allora esiste $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con misura di Lebesgue nulla t.c.

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x) d\mu}_{\text{media di } f \text{ in } B_r(x_0)} = f(x_0) \quad \forall x_0 \notin E.$$

Corollario facile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Definisco $F(x) := \int_0^x f(t) dt$.

Allora $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \notin E$ (come sopra)