

DEF. DI INTEGRALE

Def. (Step function) Sia (X, m, μ) uno spazio di misura.

Una step function è una comb. lineare (finita) di funzioni caratteristiche, quindi del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

dove

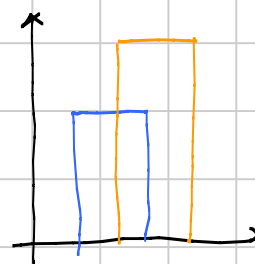
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e $A_1, \dots, A_k$ sono misurabili.

Oss. (solita seccatura) Ogni step function $\varphi(x)$ si può scrivere in modo unico usando A_i disgiunti

$$\text{se } h_0 \mathbb{1}_{[0,2]} + 5 \mathbb{1}_{[1,3]}$$

$$= 7 \mathbb{1}_{[0,1)} + 12 \mathbb{1}_{[1,2]} + 5 \mathbb{1}_{(2,3]}$$



$$\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \varphi(X)} \lambda \mathbb{1}_{\{x \in X : \varphi(x) = \lambda\}}(x)$$

Equivaleute Una step function è una $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con immagine finita.

Def. $\int_X \varphi(x) d\mu := \sum_{\lambda \in \varphi(X)} \lambda \mu \{x \in X : \varphi(x) = \lambda\}$

Def. bis Ammettiamo step function a immagine numerabile e definiamo l'integrale con la serie, almeno se la serie converge assolutamente.

Def. di integrale per funzioni positive

incluso



Dato (X, m, μ) spazio di misura, e data $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile, poniamo

$$\int_X f(x) d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu : \begin{array}{l} \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X \\ \varphi(x) \text{ step function} \end{array} \right\}$$

Def. alternativa (X, m, μ) e $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ come sopra.

$$\int_X^* f(x) d\mu := \inf \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu : \begin{array}{l} \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in X \\ \varphi(x) \text{ s.f. numerabile} \end{array} \right\}$$

$$\int_{**} f(x) d\mu := \sup \left\{ \int \dots \quad \varphi(x) \leq f(x) \dots \right\}$$

Questo lo posso fare anche se $f(x)$ non è misurabile.

Teorema Se $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ è misurabile, allora

$$\int_X f(x) d\mu = \int_{**} f(x) d\mu = \int_X^* f(x) d\mu$$

Dim. Molto facile: prima uguaglianza (quello che raggiunsi con le serie, lo raggiunsi anche con le somme parziali).

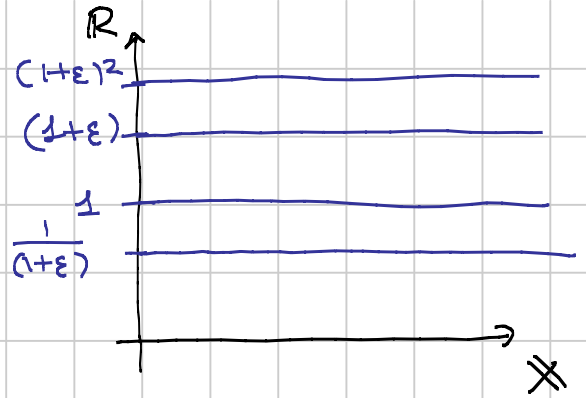
Resta da dimostrare la seconda uguaglianza.

È banale il caso in cui $\int_{**} f(x) d\mu = +\infty$ (l'altro è + grande).

Quindi $\text{supp. } \int_{\mathbb{X}} < +\infty$.

Fisso $\varepsilon > 0$ e facciamo
a fette l'immagine.

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ poniamo



$$A_k := \{x \in \mathbb{X} : (1+\varepsilon)^k \leq f(x) < (1+\varepsilon)^{k+1}\}$$

Ora posso costruire step functions sopra e sotto $f(x)$:

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

$$\varphi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad \psi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^{k+1} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

Vorrei che $\int_{\mathbb{X}} (\psi(x) - \varphi(x)) d\mu$ fosse piccolo

$$\int_{\mathbb{X}} (\psi(x) - \varphi(x)) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \varepsilon \mathbb{1}_{A_k}(x) d\mu$$

$$= \varepsilon \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \mu(A_k)}_{\int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\mu}$$

$$= \varepsilon \int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\mu \leq \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{X}} f(x) d\mu}_{\text{supposto finito}}$$

— o — o —

Domanda: la prima uguaglianza vale anche se f non è
misurabile.

E la seconda? Se $\int_{\mathbb{X}} f = \int^* f \in \mathbb{R}$, posso
dedurre che f è misurabile?

— o — o —

Def. Sia ora (X, m, μ) come prima e $f: X \rightarrow [0, +\infty]$
(non più positiva)

Allora si definisce integrale di $f(x)$ come

$$\int_X f(x) d\mu = \int_X f^+(x) d\mu - \int_X f^-(x) d\mu$$

tranne nel caso in cui sono $+\infty - \infty$

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\} \quad , \quad f^-(x) := \max\{0, -f(x)\} \\ = -\min\{0, f(x)\}$$

In somma: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Achtung! A differenza dell' integrale di RIEMANN, ora accade che

$$\int_X f(x) d\mu \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f(x)| d\mu \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ sarebbe la solita assoluta integrabilità

$$\Rightarrow \int_X f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_X f^+ \in \mathbb{R} \text{ e } \int_X f^- \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_X |f| \in \mathbb{R}.$$

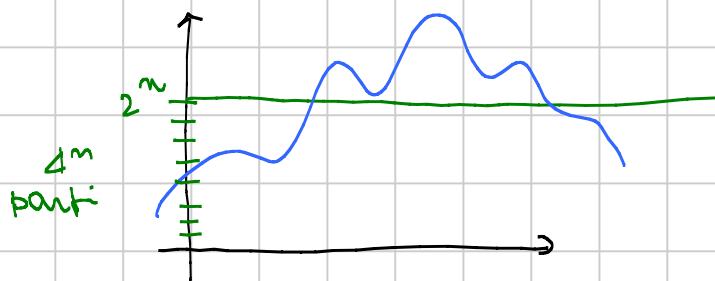
Con questa def. l' integrale della somma non è ovvio...

$$R(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad R^+ - R^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ R^+ + f^- + g^- = R^- + f^+ + g^+$$

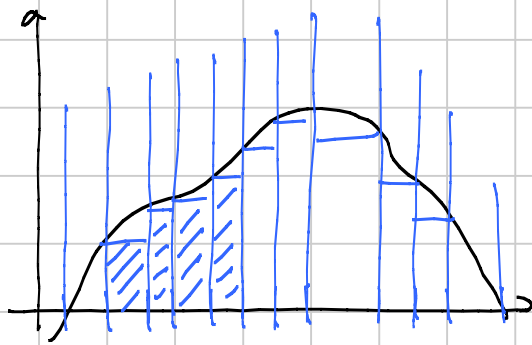
Proposizione Data $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile.

Allora esiste una successione $\varphi_n(x)$ crescente di step functions che convergono ad f puntualmente.

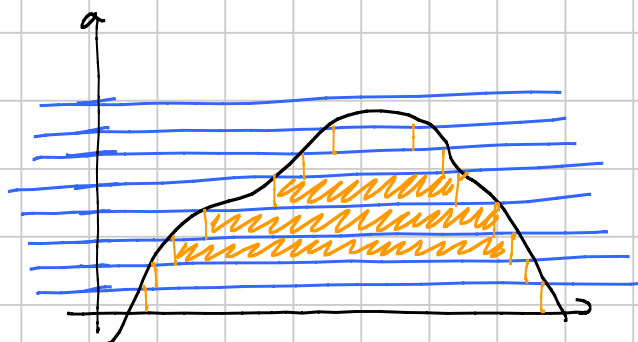
Fisso n e divido $[0, 2^n]$ in 4^n parti e poi faccio come sopra



L'integrale di Lebesgue parte dall'asse y



Riemann: sommiamo
rettangoli verticali



Lebesgue: sommiamo
rettangoli orizzontali

