

Motivazioni① Riunificare varie nozioni di integrale

- integrali propri in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$
- " impropri "
- integrali di funzioni su curve
- " " " su superfici

Non è che c'è una struttura comune

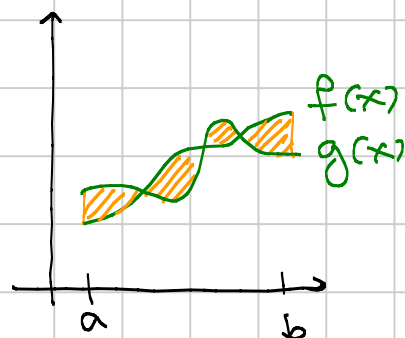
② Buoni tes. di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Problema: limite puntuale di f_n Riemann int. può non essere Riemann int.

③ Buona descrizione del completamento risp. distanze integrali

$$C^0([a,b]) \quad \text{dist}_1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Si verifica che è una distanza e che C^0 con questa distanza è spazio metrico non completo.



Chi è il suo completamento? $L^1([a,b])$

Achtung! Ci saranno dei grossi problemi, dovuti al dover scassinare BANACH-TARSKI.

Banach-Tarski

Sia $n \geq 3$ un intero e siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi QUALUNQUE tali che $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, $\text{Int}(B) \neq \emptyset$.

Allora esistono un intero positivo k e sottoinsiemi

$$A = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k \quad \text{con gli } A_i \text{ disgiunti}$$

$$B = B_1 \cup B_2 \dots \cup B_k \quad \text{" } B_i \text{ "}$$

$\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isometrie t.c.

$$\varphi_i(A_i) = B_i$$

Brutalmente: posso scomporre una sfera di raggio 1 in un numero finito di pezzi e ricomporli in modo da ottenere 2 sfere di raggio 1.
(Bastano 5 pezzi)

— o — o —

SIGMA-ALGEBRA

Sia X un insieme. Una sigma-algebra su X è un sottoinsieme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con la proprietà che

$\uparrow$
insieme
delle parti

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{M}$$

$$(ii) \quad \text{se } A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M} \quad (\text{chiuso risp. al complement})$$

$$(iii) \quad \text{se } A_i \in \mathcal{M} \text{ per ogni } i \in \mathbb{N}, \text{ allora}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{M} \quad (\text{chiuso risp. unioni NUMERABILI})$$

Oss. $\mathcal{M}$ si dice algebra se vale (i) + (ii) + (iii) solo con unioni di 2 (e quindi unioni finite)

Oss. Tra i sottoinsiemi di X si può definire somma e prodotto con le proprietà classiche

$$A \cdot B = A \cap B$$

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(equivale a identificare sottoinsiemi di X con funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Fatti semplici

$$(1) A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$$

$$(A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \text{ dove } A^c := X \setminus A)$$

$$(2) A_i \in \mathcal{M} \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$$

$$\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right)^c \right)$$

$$(3) A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M} \quad (A \setminus B = A \cap B^c)$$

(4) Data una famiglia qualsunque $\{ \mathcal{M}_i \}_{i \in I}$ di σ -algebre (I non è nec. numerabile), allora

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i \quad \text{è ancora una } \sigma\text{-algebra}$$

Def. (σ -algebra generata) Sia X un insieme, e sia

$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un sottoinsieme qualunque.

Si definisce σ -algebra generata da $\mathcal{Y}$ l'intersezione di tutte le σ -algebre che contengono $\mathcal{Y}$, che è quindi la + picc. σ -alg. che contiene $\mathcal{Y}$ (almeno una c'è ed è $\mathcal{P}(X)$).

Oss. Due esempi banali di σ -algebra:

- $\mathcal{P}(X)$
- $\{ \emptyset, X \}$.

Un terzo esempio sono $\mathcal{M}$ = sottoinsiemi finiti o numerabili e complementari degli stessi

Esercizio Non esistono σ -algebre numerabili.

Definizioni di misura

Tre modi di farlo

- misura (positiva su sigma-algebra)
- misura esterna (positiva su $\mathcal{P}(X)$)
- misura vettoriale (a valori in un Banach)

DEF. MISURA

Sia X un insieme, sia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ -algebra di sottoinsiemi.

Si dice misura una qualunque funzione

$$\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty] \quad \leftarrow \text{incluso}$$

tale che

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (NUMERABILE ADDITIVITÀ) per ogni successione $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ a due a due disgiunti vale

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

Si chiama spazio di misura la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$

DEF. MISURA ESTERNA

Sia X un insieme. Una misura esterna è una qualunque funzione

$$\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty] \quad \leftarrow \text{incluso}$$

b.c. (i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (NUMERABILE SUBADDITIVITÀ) per ogni succ. di insiemi $A_i \in \mathcal{P}(X)$ ($i \in \mathbb{N}$) vale

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\text{anche non disgiunti})$$

(iii) (MONOTONIA) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

DEF. DI MISURA VETTORIALE

Sia X un insieme, sia V un Banach, sia $\mathcal{M}$ una σ -alg.
Si dice misura vettoriale una qualunque funzione

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow V$$

t.c. (i) $\mu(\emptyset) = 0 \in V$

(ii) vale la numerabile additività

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \leftarrow \text{serie a valori in } V$$

se gli $A_i \in \mathcal{M}$ e sono a 2 a 2 disgiunti

Oss. Le misure vettoriali sono interessanti già quando $V = \mathbb{R}$
(si chiamano MISURE CON SEGNO)

Conseguenze facili delle definizioni

(1) numerabile additività $\Rightarrow$ finita additività
" subadditività $\Rightarrow$ " subadditività
(basta prendere $\emptyset$ da un certo pto in poi)

(2) Nei casi ① e ② vale la monotonia, cioè

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

Dopo video: per le misure esterne la monotonia va ridiscesa

($B = A \cup (B \setminus A)$, poi uso (sub) additività)

↑
no: corretto dopo video

(3) finita additività + numerabile subadditività $\Rightarrow$
numerabile additività

$$\begin{aligned} \text{(Basta dim. } \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \\ \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &\geq \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \text{ e mandando } n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$