

Convergenza dominata

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \text{ unif. su } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$$

Versione per integrali impropri

Teorema (convergenza dominata DISCOUNT)

continue
↑

Sia $A \in \mathbb{R}$, sia $f_n: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, sia $f_\infty: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. sui compatti

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \geq A$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f_n(x) dx = \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx$$

esistono per ogni $n \in \mathbb{N}$
grazie a (ii) + (iii) + assol. int.

Dim. Uso la def. di limite, dopo aver osservato che anche $f_\infty(x)$ è integrabile in senso improprio per lo stesso motivo delle $f_n(x)$.

Idea

$$\int_A^{+\infty} f_n(x) dx = \int_A^B f_n(x) dx + \int_B^{+\infty} f_n(x) dx$$

① Mi viene dato $\varepsilon > 0$

② Scelgo $B > A$ in maniera tale che

$$\int_B^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

(posso per l'ipotesi (i))

③ Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{B-A} \quad \forall x \in [A, B], \forall n \geq n_0$$

(posso per l'ipotesi (i))

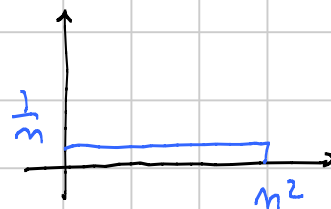
④ Dico che $\left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx - \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{+\infty} f_n - \int_A^{+\infty} f_\infty \right| &\leq \left| \int_A^B f_n - \int_A^B f_\infty \right| + \left| \int_B^{+\infty} f_n - \int_B^{+\infty} f_\infty \right| \\ &\leq \int_A^B |f_n - f_\infty| dx + \int_B^{+\infty} |f_n| + \int_B^{+\infty} |f_\infty| \\ &\leq (B-A) \frac{\varepsilon}{2(B-A)} \leq \frac{1}{4} \varepsilon \leq \frac{1}{4} \varepsilon \\ &= \varepsilon. \\ &\quad \text{---o---o---} \end{aligned}$$

Oss. Senza la convergenza dominata (ipotesi (ii) + (iii))
l'enunciato è falso.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{se } x > n^2 \end{cases}$$



$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ unif su } \mathbb{R} \text{ ma } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow +\infty.$$

Integrale di Dirichlet

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Idea: considero la funzione

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

Fatti da dimostrare:

- ① $F(\lambda)$ è definita per ogni $\lambda \geq 0$
- ② $F(\lambda)$ è continua in $[0, +\infty)$ e $F(0) = D$
- ③ $F(\lambda) \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$
- ④ $F(\lambda)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ e $F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}$

Dati per buoni i fatti, allora

- ④ $\Rightarrow F(\lambda) = k - \arctan \lambda$ per un opportuno k
- ③ $\Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$
- ② $\Rightarrow D = \frac{\pi}{2}$

Dim. ③ Segue dalla convergenza dominata

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x}$$

Per $\lambda \geq 1$ abbiamo che $|f_\lambda(x)| \leq e^{-\lambda x} \leq \underbrace{e^{-x}}_{g(x)}$

e inoltre $f_\lambda(x) \rightarrow 0$ uniformemente in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$. Infatti

$$|f_\lambda(x)| \leq e^{-\lambda x} \leq e^{-\lambda A} \quad \text{per ogni } x \geq A$$

$\downarrow$
0
se $A > 0$

Come prima

$$\int_0^{+\infty} = \underbrace{\int_0^A}_{\text{piccolo se } A \text{ è piccolo}} + \underbrace{\int_A^B}_{\text{piccolo se } B \text{ è grande unif. in } \lambda} + \int_B^{+\infty}$$

piccolo se λ è grande.

Dim. ① Quella classica per $\lambda = 0$
Se $\lambda > 0$ vale pure l'assoluta integrabilità

Dim. ② Quello che crea problemi è il limite per $\lambda \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

NON POSSO USARE SUBITO LA CONV. DOMINATA.

Devo fare l'int. per parti come ad analisi 1:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x} \sin x dx &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx}_{\downarrow \text{ per conv. unif. }} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \\ \int_1^B \frac{e^{-\lambda x}}{x} \sin x dx &= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{x} (-\cos x) \right]_1^B + \int_1^B \cos x \frac{-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}}{x^2} dx \\ &= -\frac{e^{-\lambda B} \cos B}{B} + e^{-\lambda} \cos 1 - \int_1^B \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} \cos x dx \end{aligned}$$

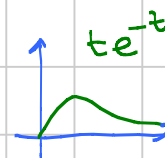
Mando $B \rightarrow +\infty$:

$\cos 1$ per $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x} \sin x dx = e^{-\lambda} \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} \cos x dx$$

Per l'integrale $\int_1^{\infty} \dots \cos x \, dx$ posso usare la corr. dominata

$$\left| \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} \cos x \right| \leq \frac{\overbrace{|\lambda x e^{-\lambda x}|}^{\leq \max_{t \geq 0} t e^{-t}} + \overbrace{|e^{-\lambda x}|}^{\leq 1}}{x^2}$$



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_1^{\infty} \frac{\dots}{x^2} \cos x \, dx \leq \frac{C}{x^2} = g(x) = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$$

Dall'analisi 1: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \cos 1 + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$