

MODELLO PREDATORIA - PREDATORI

Equazione Logistica

$$y' = ay$$

y = numero di individui

a = tasso di crescita

(riproduzione) $a > 0$

$$y(t) = y(0) e^{at}$$

crescita esponenziale

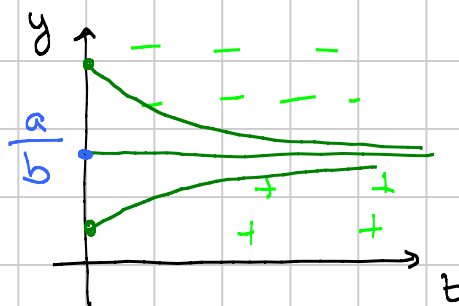
$$y' = y(a - by) = ay - by^2$$

Eq. logistica

↑
tasso di
riproduzione

↑
fastidio di essere
in tanti

$a > 0, b > 0$



MODELLO VOLTERRA - LOTKA

(Preda - predatore)

$$\begin{cases} u' = u(a - bu) \\ v' = v(-c + du) \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

u = prede

v = predatori

Fatto 1

Se $u(0) = 0$, allora $u(t) = 0$ sempre

Se $v(0) = 0$, allora $v(t) = 0$ sempre

Infatti, se $u(0) = 0$, allora una soluz. è $u(t) \equiv 0$

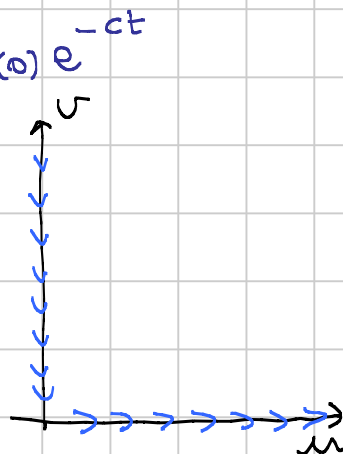
Analog., se $v(0) = 0$, allora una soluz. è $v(t) = v(0) e^{-ct}$

$$v(t) \equiv 0$$

$$u(t) = u(0) e^{at}$$

Se parto con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ non posso

finire sugli assi per unicità



Fatto 2 Non si può avere blow-up in tempo finito (quindi esistenza globale)

Sappiamo che per $u(0) > 0$ e $v(t) > 0$ le soluzioni si mantengono positive. Quindi

$u'(t) \leq au(t) \Rightarrow u(t)$ non ha blow up $\Rightarrow$ la seconda eq. diventa

$$v' = v \underbrace{(-c + du(t))}_{d(t) \text{ che esiste glob.}}$$

$\Rightarrow$ se penso l'eq. come lin. in v la soluz. esiste glob.

Fatto 3 Punti stab. del sistema.

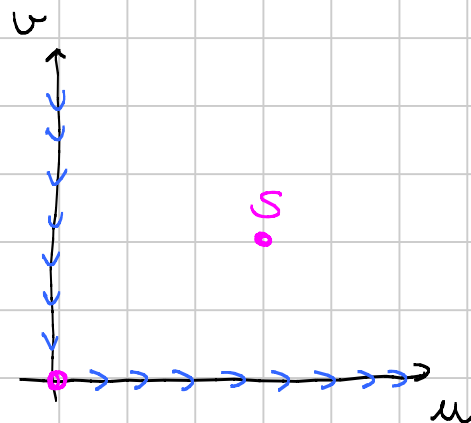
$$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{c}{d} \\ v = \frac{a}{b} \end{cases}$$

S

Sono stabili?

$$\begin{cases} u(a-bv)=0 \\ v(-c+du)=0 \end{cases}$$



$$(0,0) \rightsquigarrow \begin{cases} u' = au \\ v' = -cv \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autoval. } \pm \rightsquigarrow \text{sella}$$

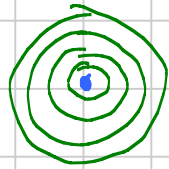
$$\text{Studio S: } u = \frac{c}{d} + R \quad v = \frac{a}{b} + k$$

$$\begin{aligned} R' = u' &= \left(\frac{c}{d} + R\right)(\cancel{a} - \cancel{a} - bk) = -\frac{bc}{d}k \\ k' = v' &= \left(\frac{a}{b} + k\right)(\cancel{-c} + \cancel{c} + dR) = \frac{ad}{b}R \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} > 0 \Rightarrow$ le soluzioni, se fossero reali, sarebbero $\neq 0$, ma non va bene con $\text{Tr} = 0 \Rightarrow$ Sono immaginarie pure

$\Rightarrow$ non posso applicare il te. di linearizzazione.

Se fosse lineare, le soluzioni "ruoterebbero intorno al punto".



FATTO 4 Le soluzioni con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ sono periodiche (cerchietti nello spazio delle fasi)

Metodo energetico: cerco $E(u, v)$ definita in $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ tale che

$$E(u(t), v(t)) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

$\uparrow$ dip. dal dato iniziale.

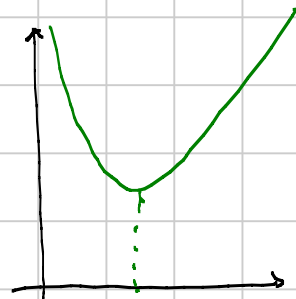
$$\begin{aligned} 0 = [E(u, v)]' & \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{chain rule}}}{=} E_u(u, v) \dot{u} + E_v(u, v) \dot{v} \\ & = E_u(u, v) u(a - bv) + E_v(u, v) v(-c + du) \end{aligned}$$

Divido per uv (posso perché...)

$$0 = E_u(u, v) \underbrace{\left(\frac{a}{v} - b\right)}_{-E_v} + E_v(u, v) \underbrace{\left(-\frac{c}{u} + d\right)}_{E_u}$$

$$E(u, v) = \underbrace{du - c \log u}_{f(u)} + \underbrace{bv - a \log v}_{g(v)} \quad \text{funzione !!}$$

Si verifica che $E(u, v)$ è convessa nel 1° quadrante, con minimo proprio in S .

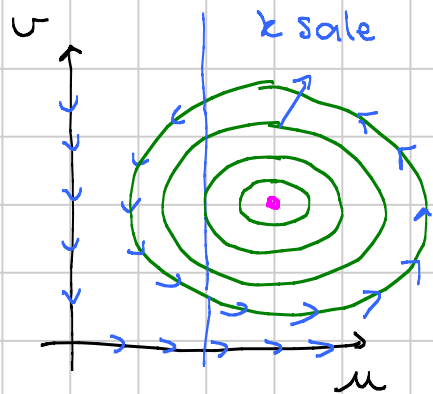


Si vede che le linee di livello sono curve intorno ad S

$$E(u,v) = k$$

— o — o —

Preda - predatore con autolimitazione



$$\begin{aligned} u' &= u(a - bu - \varepsilon u) \\ v' &= v(-c + du - \delta v) \end{aligned} \quad \varepsilon, \delta = \text{autolimitazione}$$

Come prima fatto 1, 2.

I punti stazionari sono $(0,0)$ e la solus. S di

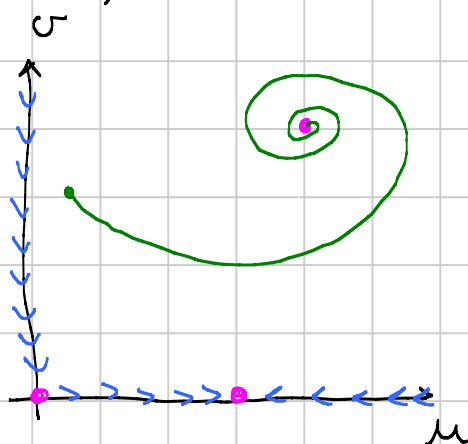
$$\begin{cases} a - bu - \varepsilon u = 0 \\ -c + du - \delta v = 0 \end{cases} \rightsquigarrow (u_0, v_0) = S$$

[In realtà ce ne sono altri 2 con una sola var. nulla]

Linearizzando si vede (esercizio) che in S gli autovalori hanno parte reale negativa $\Rightarrow S$ è asintoticamente stabile (se punto vicino, tende ad S)

Fatto nuovo

Tutte le solus. con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ tendono ad S .



Metodo energetico: cerco $E(u,v)$ che ha minimo in S e decresce lungo le soluzioni.

$$E(u,v) = d(u - u_0 \log u) + b(v - v_0 \log v)$$

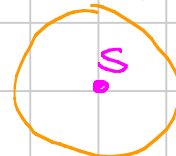
$$E_u = 1 - \frac{u_0}{u} \quad E_v = 1 - \frac{v_0}{v} \rightsquigarrow \text{minimo è in } (u_0, v_0)$$

$$\begin{aligned}
[E(u,v)]' &= d \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) \dot{u} + b \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \dot{v} \\
&= d \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) u (a - bv - \varepsilon u) + b \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) v (-c + du - \delta v) \\
&= d (u - u_0) (\cancel{a} - b \cancel{(v - v_0)} + \cancel{b v_0} - \varepsilon (u - u_0) - \cancel{\varepsilon u_0}) \\
&\quad + b (v - v_0) (-\cancel{c} + d \cancel{(u - u_0)} + \cancel{d u_0} - \delta (v - v_0) - \cancel{\delta v_0}) \\
&= -\varepsilon d (u - u_0)^2 - \delta b (v - v_0)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Perché $E(u,v) \rightarrow \text{minimo}$ (quindi $(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)$)?

$$E(u,v) \rightarrow E_0 \neq \min$$

$$E(u,v) = E_0$$



$\Rightarrow$ Soluzioni fuori dalla linea di livello E_0

$$\Rightarrow \varepsilon d (u - u_0)^2 + \delta b (v - v_0)^2 \geq c > 0$$

$$\Rightarrow E' \leq -c \Rightarrow E(t) \rightarrow -\infty \text{ il che è impossibile.}$$