

DIPENDENZA CONTINUA E DINTORNI

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Come la soluzione dipende da } \alpha \\ u(t, \alpha) \end{array}$$

1^a domanda: $\begin{cases} u'_n = f_n(t, u_n) \\ u_n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \quad \begin{cases} u'_\infty = f_\infty(t, u_\infty) \\ u_\infty(t_0) = \alpha_\infty \end{cases}$

Se $\alpha_n \rightarrow \alpha_\infty$, possiamo dire che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ in qualche senso? Ancora più in generale con $f_n \rightarrow f_\infty$ in qualche senso.

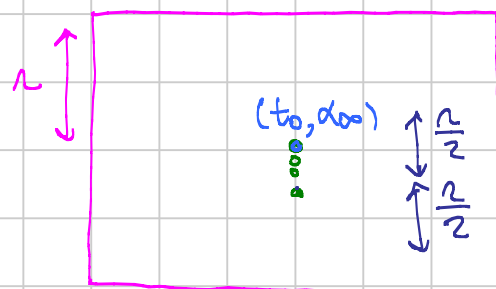
Subdomanda: è vero che le varie u_n hanno un tempo di vita in comune $[t_0, t_0 + \delta]$ che va bene per tutte.

Supponiamo che f sia la stessa ovunque, definita in un rettangolo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [\alpha_\infty - 1, \alpha_\infty + 1]$.

Sia M il max di $|f(t, u)|$ nel rettangolo

Scelgo δ_0 in modo tale che

$$\delta_0 \leq \delta \quad \uparrow \quad 2M\delta_0 \leq 1$$



Allora per n abbastanza grande il problema approx ed il pbm. diivite hanno almeno una soluz.

$$u_n : [t_0, t_0 + \delta_0] \rightarrow [\alpha_\infty - 1, \alpha_\infty + 1]$$

Dim. vero appena $|\alpha_\infty - \alpha_n| \leq \frac{1}{2}$. A quel p.to posso centrare in (t_0, α_n) un rettangolo di altezza $\frac{1}{2}$ contenuto in R .

Posso dire che le $u_n(t)$ verificano le ipotesi di A.A.

① Sono equilimitate in $[\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon]$

② Sono equilip. con costante $\leq M$.

Allora a meno di sottosucc. convergono a qualcosa

$$u_{m_k}(t) \rightarrow v_\infty(t) \quad \text{unif. in } [t_0, t_0 + \delta_0]$$

Vorrei tanto che $v_\infty(t)$ fosse $u_\infty(t)$

Forma diff. $u_{m_k} \rightarrow v_\infty$ unif. + f continua

$$\Rightarrow f(t, u_{m_k}(t)) \rightarrow f(t, v_\infty(t)) \quad \text{unif. in } \dots$$

" $u'_{m_k}(t)$

C'è convergenza nel p.to t_0 , quindi per il teo. di scambio della derivata

$$\begin{cases} v_\infty'(t) = f(t, v_\infty(t)) \\ v_\infty(t_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

Quindi $v_\infty(t)$ è una soluzione del problema limite.

Cosa abbiamo dim.: una succ. di soluz. con dato α_n ha una s. succ. conv. ad una soluz. con dato α_0 .

Se sapessimo che il pbm. limite ha soluzione UNICA (ad esempio perché f è lip.) allora posso dire che non serve la sottosucc. cioè

$$u_{\text{m}}(t) \rightarrow u_\infty(t) \leftarrow \text{unica sol. pbm. limite}$$

↑ tutta

Dim. Solita applicazione del lemma della sotto-sotto.

Supponiamo in aggiunta che f sia dip. in u con costante L , come nel tes. CLPL. Allora, date 2 soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ vale la stima

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(t_0) - v(t_0)| e^{\frac{L(t-t_0)}{L(t-t_0)}} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_0]$$

(si intende che $u(t)$ e $v(t)$ sono def. in $[t_0, t_0 + \delta_0]$ e stanno in un rettangolo R dove la costante di dip. è L)

Dim. $w(t) := |u(t) - v(t)|^2$ (così vale anche per i sistemi)

$$|w'(t)| = 2 | \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle |$$

$$\leq 2 |u(t) - v(t)| \cdot L |u(t) - v(t)|$$

$$= 2L w(t)$$

Quindi $w'(t) \leq 2L w(t)$ equazione scalare

quindi è sottosolut. di $z' = 2Lz \leadsto$

$$w(t) \leq w(t_0) e^{2L(t-t_0)} \quad \text{soluz.}$$

Farendo la radice ho la tesi.

Brutal mode Vorrei provare a dim. che la soluz. dipende in modo C^1 dal dato iniziale α , almeno sotto certe ipotesi

$$\begin{cases} u'_\alpha = f(t, u_\alpha) \\ u_\alpha(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u'_{\alpha+\Delta} = f(t, u_{\alpha+\Delta}) \\ u_{\alpha+\Delta}(t_0) = \alpha + \Delta \end{cases}$$

$$\frac{u_{\alpha+\Delta}(t) - u_\alpha(t)}{\Delta} = w_\Delta(t) \quad \text{e vedo che succede}$$

$$w'_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} [f(t, u_{\alpha+\Delta}(t)) - f(t, u_\alpha(t))] \quad \frac{u_{\alpha+\Delta}(t) - u_\alpha(t)}{u_{\alpha+\Delta}(t) - u_\alpha(t)}$$

$$= w_\Delta(t) \quad \frac{f(\dots) - f(\dots)}{u_{\alpha+\Delta}(t) - u_\alpha(t)} \quad \downarrow \Delta \rightarrow 0$$

$$f_u(t, u_\alpha(t))$$

$w_\Delta(t) \rightarrow w(t)$ che risolve

$$w'(t) = f_u(t, u_\alpha(t)) w(t)$$

Fissato α , questa è una funzione di t , quindi ho scritto un'eq. lin. in $w(t)$.

Risultato (dimostrabile rigorosamente): la soluzione $u(t, \alpha)$ è derivabile rispetto ad α e vale

$$u_\alpha(t, \alpha) = w(t)$$

↑ soluz. part. di sopra

Condizioni di tipo OSGOOD

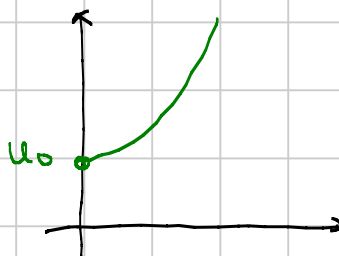
1ª situazione

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo

$$f: [u_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

positiva



Cosa decide se c'è o no blow-up? È l'integrale

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du = \begin{cases} +\infty & \Rightarrow \text{esistenza globale} \\ \text{conv.} & \Rightarrow \text{blow up} \end{cases}$$

2ª situazione $\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \\ f(0) = 0 \end{matrix}$

La soluz. $u(t) \equiv 0$ è unica?

$$\int_0^1 \frac{1}{f(u)} du = \begin{cases} +\infty & \Rightarrow \text{unicità} \\ \text{conv.} & \Rightarrow \text{non unicITÀ} \end{cases}$$

Esempio supponiamo che

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_1 - u_2| \cdot |\log |u_1 - u_2||$$

Questa cond. è meno della Lip. e più della Hölder

Questa cond. basta per l'unicità del pbm. di Cauchy.

Se faccio la diff. $w(t) = u_2(t) - u_1(t)$

$\uparrow$ 2 soluz. $\uparrow$ di $u' = f(t, u)$

$\leadsto$ arrivo a $w'(t) \leq \underbrace{w(t) \cdot \log |w(t)|}_{f(w) = w \log w}$

Come si dim. le 2 situazioni? 1ª situazione

$$u' = f(u) \leadsto \frac{du}{f(u)} = dt \leadsto \underbrace{\int \frac{du}{f(u)}}_{\Phi(u)} = t + C$$

se voglio ricavare
per t grandi $\uparrow$

e ora vorrei ricavare se in funzione di $t \leadsto$ serve Φ non limitata