

Esercizio $f_n \rightarrow f_\infty$ uniform.

Posso dire che $\sin f_n(x) \rightarrow \sin f_\infty(x)$?

Se si trattasse di puntuale, la risposta è SI e più in generale

$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente + φ continua

$\Rightarrow \varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f_\infty(x))$ puntualmente

Per la uniforme, nel caso di $\sin$ uso la lip.

$$|\sin(f_\infty(x)) - \sin(f_n(x))| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)|$$

$\Rightarrow$ conv. uniforme

In realtà basta l'uniforme continuità

Prop. Siano S un insieme, (X, d_X) uno sp. metrico, (Y, d_Y) un altro spazio metrico.

Siano $f_n: S \rightarrow X$ e $f_\infty: S \rightarrow X$

Sia $\varphi: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in S

(ii) φ sia unif. continua

Allora

$$S \xrightarrow{f_n} X \xrightarrow{\varphi} Y$$

$\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f_\infty)$ unif. in S (come funzioni da S in Y).

Dim. Devo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall s \in S \quad d_y(\varphi(f_\infty(s)), \varphi(f_n(s))) \leq \varepsilon$$

Prendo, dato $\varepsilon > 0$, il δ corrispondente nella def. di unif. cont. di φ . Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq m_0 \quad \forall s \in S \quad d_x(f_\infty(s), f_n(s)) \leq \delta \quad (\text{posso per la (i)})$$

Grazie all' unif. cont. di φ

$$d_y(\varphi(f_\infty(s)), \varphi(f_n(s))) \leq \varepsilon \quad \forall s \in S.$$

— 0 — 0 —

Oss. La semplice continuità di φ in generale non basta

$$S = (0, +\infty) \quad f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \quad f_\infty(x) = \frac{1}{x}$$

$$\varphi(x) = x^2 \quad \varphi(f_n(x)) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{nx} \quad \varphi(f_\infty(x)) = \frac{1}{x^2}$$

C'è conv. puntuale, ma non conv. unif. in $(0, +\infty)$

$$|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f_\infty(x))| = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{nx}$$

il sup del LHS in x è $+\infty$ e quindi non tende a 0.

— 0 — 0 —

Prop. Sia $[a, b]$ un intervallo. Siano $f_n, f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $[a, b]$

(ii) φ continua (e basta).

Allora

$$\varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f_\infty(x)) \quad \text{unif. in } [a, b].$$

Dim. Esiste $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto tale che

$$f_3(x) \in K \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(e quindi lo stesso vale per $f_{00}(x)$). A questo pto basta considerare φ ristretta a k e questa è unif. cont.

Perché esiste k ? Occhio alle dim. sbagliate: unione num. di opt.
non è opt. A

Idea:

- immagine di f_∞ è $\subseteq [-A, A]$
- considero $[-A-1, A+1]$: qui c'è sta il grafico di $f_m(x)$ per ogni $m \geq m_0$
- Considero

$$K = [-A-1, A+1] \cup f_1([a,b]) \cup \dots \cup f_m([a,b])$$

(unione finita di compatti).

Oss. Vale una generalizz. in un contesto

Variante: $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. $\stackrel{?}{\Rightarrow} f_n(\sin x) \rightarrow f_\infty(\sin x)$ unif.

$f_n, f_\infty : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Supp. $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. su $[0, 1]$.
Allora

$$f_n(\sin x) \rightarrow f_0(\sin x) \text{ unif. in } \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad (\text{Ouvia}) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_\infty(x) - f_n(x)| =$$

$$= \sup_{y \in [-1, 1]} |f_\infty(y) - f_n(y)| \rightarrow 0 \text{ per def. } \square$$

Domanda $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) tutte le $f_n(x)$ sono periodiche, ma con periodo che dipende da n

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti

Posso concludere che f_∞ è periodica?

Risposta: NO $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ (sono tutte periodiche)

Si vede (analisi ±) che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := x$ puntualmente
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Dico che la conv. è unif. sui cpt.

Mi metto wlog su $[0, A]$ (in $[-A, 0]$ la situaz. è simm.)

$$t - \frac{1}{6}t^3 \leq \sin t \leq t \quad \forall t \geq 0$$

$$\frac{x}{n} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{n^3} \leq \sin\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

$$x - \frac{x^3}{6n^2} \leq \underbrace{n \sin \frac{x}{n}}_{f_n} \leq \underbrace{x}_{f_\infty}$$

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{x^3}{6n^2} \quad \forall x \geq 0$$

$$\sup_{x \in [0, A]} |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{A^3}{6n^2} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Oss. Non è vero che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. su $\mathbb{R}$ perché le $f_n(x)$ sono limitate su $\mathbb{R}$, ma f_∞ non lo è.

Domanda più seria: e se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. su $\mathbb{R}$, posso dedurre che f_∞ è periodica?

Risposta: NO

Esempio: considero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) =: S_{\infty}(x)$$

Questa conv. unif. su tutto $\mathbb{R}$, perché conv. tot. $\sup_{x \in \mathbb{R}} | \dots | = \frac{1}{n^2}$

Chiamo $S_n(x)$ le somme parziali e osservo che

$$S_n(x) \rightarrow S_{\infty}(x) \quad \text{unif. in } \mathbb{R}$$

tutte le $S_n(x)$ sono periodiche di periodo $2\pi \cdot 2^n$ (periodo dell'ultimo sin)

Mi resta da dim. che $S_{\infty}(x)$ NON è periodica.

Strategia:

→ $S_{\infty}(x)$ è di classe C^1 in quanto anche la serie delle derivate converge totalm., quindi unif., su tutto $\mathbb{R}$ (allo stesso modo è C^{∞})

$$\rightarrow S'_{\infty}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{2^n} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \Big|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$$

→ $S'_{\infty}(x) \leq S'_{\infty}(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (basta osservare che i cos ≤ 1)

→ Se $S'_{\infty}(x)$ fosse periodica, allora esisterebbe $T > 0$ t.c.

$S'_{\infty}(T) = S'_{\infty}(0)$, ma questo è possibile solo se

$$\cos\left(\frac{T}{2^n}\right) = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

ma questo è impossibile per n grande poiché $0 < \frac{T}{2^n} < \pi$
e qui $\cos(\cdot) < 1$ stretto.