

Lemma 1 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie di potenze.

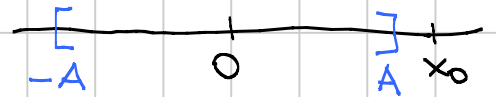
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un valore per cui converge. Sia $a \in \mathbb{R}$ con $0 < a < |x_0|$.

Allora la serie converge totalmente in $[-a, a]$

Dim. Poiché in x_0 converge, allora in x_0 verifica la cond. necessaria,

$$\text{cioè } c_n x_0^n \rightarrow 0$$

quindi è limitata



$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |c_n| \cdot |x_0|^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|c_n| \leq \frac{M}{|x_0|^n}$$

Vi metto in $[-A, A]$ e ho che

$$\sup_{x \in [-A, A]} |c_n x^n| \leq |c_n| \cdot A^n \leq M \frac{A^n}{|x_0|^n} = M \left(\frac{A}{|x_0|} \right)^n$$

quindi la serie dei sup è maggiorata da una geom. con ragione < 1 , quindi converge.

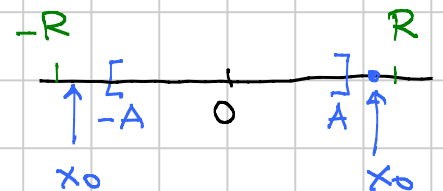
— o — o —

Dim. teo. 1 Raggio

$$R := \sup \{ |x| : \text{la serie converge in } x \}$$

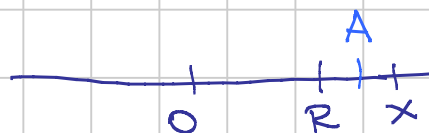
Dico che valgono ①, ② e ③ ← gratis

La dim. di ① segue dal lemma prec. dopo aver trovato un x_0 per cui la serie converge con $A < |x_0| < R$



Resta da dim. che la serie non verifica nemmeno la cond. necessaria per $|x| > R$.

Se la verificasse, allora per la dim. del lemma avrei contr. in $[-A, A]$ con $R < A < |x|$, il che va contro la def. di sup.



— o — o —

Oss. Il lemma si può enunciare supponendo solo che la serie verifichi la cond. nec. in x_0 .

A quel p.to posso porre $R := \sup \{ |x| : \text{vale la cond. nec.} \}$

— o — o —

Dim. teorema 2 Sia $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Supponiamo $L \in (0, +\infty)$

Per il lemma precedente

(gli altri casi sono più semplici)

$R := \sup \{ x > 0 : \text{per } x \text{ vale la cond. nec.} \}$

↓

$x^n |a_n| \rightarrow 0$, cioè $|x|^n \cdot |a_n| \rightarrow 0$

Calcolo il limite con il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|x|^n \cdot |a_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se $|x| < \frac{1}{L}$, allora $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \limsup < 1$

quindi per il criterio della radice $|x|^n \cdot |a_n| \rightarrow 0$

Se $|x| > \frac{1}{L}$, allora sappiamo che esiste sottosuccessione

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L,$$

e quindi $\sqrt[n_k]{|x|^{n_k} |a_{n_k}|} = |x| \cdot \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow |x| \cdot L > 1$

il che è assurdo perché se $|x|^{n_k} |c_{n_k}| \rightarrow 0$, allora definitivamente sarebbe ≤ 1 .

— o — o —

Lemma di sommazione parziale (vedi Analisi 1)

Poniamo $A_n: a_0 + a_1 + \dots + a_n$ (primitiva di una succ.)

$$\sum_{k=m+1}^n a_k b_k = A_n b_{m+1} - A_m b_{m+1} - \sum_{k=m+1}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$$

per ogni $m > n$

Dim. teo. 3

Passo 1: semplificazioni

→ Posso supporre wlog di essere in R (e non in $-R$): se sono in $x = -R$, cambio x con $-x$ e inglobo i segni nei coeff.

→ Posso supporre wlog che $R = 1$: se così non fosse, cambio x in Ry e gli R^n di tutto nei coeff.

→ Posso supporre wlog che sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$: se così

non fosse, basta cambiare c_0 , cioè aggiungere o togliere una costante.

Passo 2 Chiamo i coeff. a_n e non c_n . Quindi la serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \quad (\text{non posso supporre che } \sum |a_n| < +\infty)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $a_n \quad b_n$

Passo 3 Devo dimostrare la conv. unif. in $[0, 1]$.

Per farlo dimostro che la successione delle somme parziali $S_m(x)$ della serie di funzioni è di Cauchy rispetto alla norma del sup., cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall m > n \geq n_0 \quad |S_m(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^m a_k x^k = (\text{uso lemma di Abel})$$

$$= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} - \sum_{k=n+1}^m A_k (x^{k+1} - x^k)$$

$$= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} + (1-x) \sum_{k=n+1}^m A_k x^k$$

Procedo in ordine

1 - mi è stato dato $\varepsilon > 0$

2 - scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|A_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq n_0$
 $\uparrow$
posso perché $A_k \rightarrow 0$.

3 - Concludo

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq |A_{m+1}| \cdot |x|^{m+1} + |A_n| \cdot |x|^{n+1} + (1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| x^k \\ &= |A_{m+1}| \cdot |x|^{m+1} + |A_n| \cdot |x|^{n+1} + (1-x) \frac{\varepsilon}{3} \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k}_{= \frac{x^{n+1}}{1-x}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Esercizio Mostrare che se $\sum a_k = +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_k x^k = +\infty$$

Dim. teo. 4

Basta dimostrare che una serie di potenze e la sua derivata termine a termine hanno lo stesso raggio di conv. (poi si usa il teorema di scambio della derivata)

$\sum n c_n x^{n-1}$ per calcolare il raggio di conv. faccio

$$\sqrt[n]{|n c_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ \text{ha} \\ \text{limite } 1}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{|c_n|}}_{\substack{\downarrow \\ \text{ha limsup } L}} \quad \text{ha limsup } L$$

Oss. Il comportamento per $x = \pm R$ può solo peggiorare, cioè se si ha conv. per la serie delle derivate, allora si ha anche per la serie iniziale.

Supponiamo $x = R = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n a_n}_{\substack{\downarrow \\ \text{ha somme parziali} \\ \text{limitate}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\text{converge per Dirichlet} \\ \text{tende a 0 decrescendo}}}$$

— 0 — 0 —