

Domande su una serie di funzioni:

- dove conv. punt. / unif.
- regolarità del limite
- comportamento del limite agli estremi della zona di def.

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\arctan(nx)}{n^2}}_{f_n(x)} =: f(x)$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale la stima $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2} = M_n$

$\Rightarrow$ conv. tot. su tutto $\mathbb{R} \Rightarrow$ puntuale e unif su tutto $\mathbb{R}$

Il limite $f(x)$ è una funzione continua (le $S_n(x)$ sono cont. ed il limite è unif.)

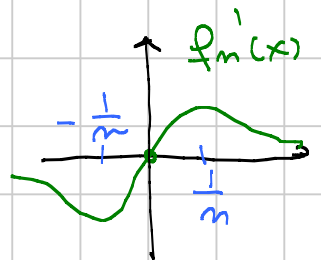
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{= \frac{\pi^2}{6}}$$

Teo. di scambio una volta che ho conv. unif.

su tutto $\mathbb{R}$ (basta su semiretta dx)

Se volessi sapere se $f(x)$ è C^1 dovrei considerare la serie di $f_n'(x)$ e sperare nella unif.

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n} \frac{x}{1+n^2x^2}$$



Se voglio sperare nella totale devo fare il sup

$$\sup \{ |f_n'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$f_n''(x) = \frac{1}{n} \frac{(1 - n^2 x^2 - 2n^2 x^2)}{()^2} = \frac{1}{n} \frac{(1 - n^2 x^2)}{()^2} \quad x = \pm \frac{1}{n}$$

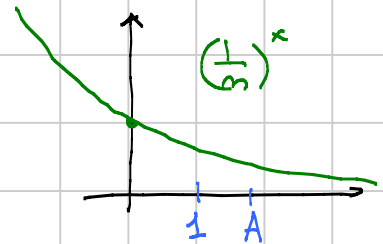
Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \text{ conv. totalmente su } \mathbb{R} \Rightarrow \text{conv. unif.}$$

Teo. scambio $\Rightarrow f \in C^1$ e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{f_n(x)} =: f(x)$



Analisi 1 $\Rightarrow$ convergenza puntuale solo per $x > 1$.

La convergenza è unif. in $(1, +\infty)$? Se sì, avrei la continuità e un aiuto nel fare il lim per $x \rightarrow 1^+$.

Vediamo la totale: $\sup \{ f_n(x) : x > 1 \} = \frac{1}{n}$ 😞

Niente totale $\Rightarrow$ BOH.

Fisso $A > 1$: allora $\sup \{ f_n(x) : x \geq A \} = \frac{1}{n^A}$

Per ogni $A > 1$ si ha che la serie conv. TOTALMENTE in $[A, +\infty)$ quindi conv. unif. in $[A, +\infty)$, quindi $f(x)$ è cont. in $[A, +\infty)$.

Questo basta per concludere la continuità in $(1, +\infty)$.

La conv. unif. sulle semirette dx basta per concludere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1.$$

↑
teo. scambio

↑
colpa di $f_1(x)$ che tende a 1
(tutte le altre tendono a 0)

Non posso usare il teo. di scambio per $x \rightarrow 1^+$. A mano osso che

$$f(x) \geq S_n(x) \quad \forall x > 1 \quad \forall n \geq 1$$

↑
perché sono tutte ≥ 0

Faccio il liminf a dx e su e ottengo

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow 1^+} f(x) &\geq \liminf_{x \rightarrow 1^+} S_n(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ora faccio il sup su $n \in \mathbb{N}$ e ottengo

$$\liminf_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \text{ quindi è pure limite}$$

(a posteriori lo scambio è giustificato)

Ora sappiamo anche che non c'è conv. unif. in $(1, +\infty)$.

Infatti

$$\sup \left\{ |f(x) - S_n(x)| : x > 1 \right\} = +\infty \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

↑ non limitata ↑ limitata

quindi non può tendere a 0 per $n \rightarrow +\infty$

Fatto generale Una serie di funzioni limitate in un certo S non può conv. unif. in S ad una funzione non limitata in S .

— o — o —

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^n)}{n}$$

$x \geq 0$ (ma per $x < 0$ è
MOLTO interessante)

Per $x \geq 1$ manca cond. nec. di Analisi 1 $\Rightarrow$ addio.

Non c'è conv. totale in $[0, 1) \Rightarrow$ BOH

Fisso $A \in [0, 1)$ e osservo che

$$\sup \{ |f_n(x)| : x \in [0, A] \} = \frac{1}{n} \arctan(A^n)$$

converge per CA. con $\frac{A^n}{n}$

$\Rightarrow$ totale in $[0, A] \Rightarrow$ unif. in $[0, A] \Rightarrow$ limite continuo
in $[0, A]$
 $\Rightarrow$ limite cont. in $[0, 1)$

Per fare il limite per $x \rightarrow 1^-$ non posso usare thm. di
scambio, ma come prima

$$f(x) \geq S_n(x) \quad \forall x \in [0, 1) \quad \forall n \geq 1, \text{ quindi}$$

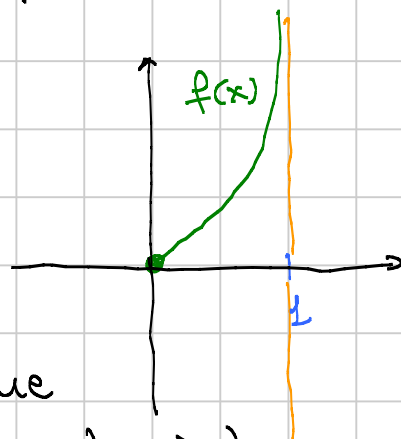
$$\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 1^-} S_n(x) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

e facendo il sup in $n \in \mathbb{N}$ ottengo $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

Per x negativi è equivalente a studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan x^n}{n} \quad \text{per } x \geq 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_n \quad \varphi_n(x)$



Per $x \in [0, 1]$ posso usare Leibnitz in versione
serie di funzioni ($x \in [0, 1]$ serve per la monotonia)

Allora si ha conv. unif. se e solo se

$$\underbrace{\sup \{ \varphi_n(x) : x \in [0, 1] \}}_{\frac{\pi}{4} \frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

Quindi ok conv. unif. in $[0, 1]$, cioè in $[-1, 0]$ per quella originaria.

Per $x \geq 1$ aggiungo e tolgo $\frac{\pi}{2n}$:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{2n}}_{\text{serie di numeri che converge}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(x^n) - \frac{\pi}{2}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

$\uparrow$ formula archi associati $\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^n}_{y^n \text{ con } y \in [0, 1]}$

Quindi anche l'ultima serie conv. unif. in $[1, +\infty)$.

Conv. unif. in $[0, 1] + \text{conv. unif. in } [1, +\infty) \Rightarrow \text{conv. unif. in } [0, +\infty)$

l'unione è finita

Tornando a quella originaria abbiamo

- conv. puntuale in $(-\infty, 1)$
- conv. totale e quindi unif in $(-\infty, A]$ per ogni $A < 1$
con tutto quello che comporta
- niente unif. in $(-\infty, 1)$ perché $f(x)$ è non limitata e le somme parziali invece lo sono.

— o — o —