

Continuità in spazi metrici

Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici.

Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Sia $x_0 \in X$.

Cosa vuol dire che f è continua in x_0 .

Per succ. Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_0$ in X si ha che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ in Y

ϵ - δ Per ogni $\epsilon > 0$ esiste almeno un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X \text{ con } d_x(x, x_0) \leq \delta \text{ si ha } d_y(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$$

Teorema f è continua per succ. $\Leftrightarrow f$ è continua ϵ - δ

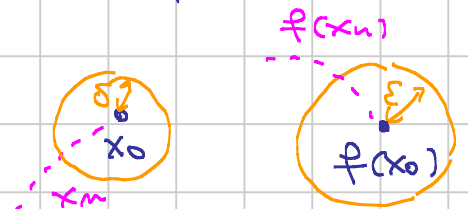
Dim. (stessa di Analisi 1)

$\Leftarrow$ Prendo $x_n \rightarrow x_0$ e voglio far vedere che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.
Prendo $\epsilon > 0$ e trovo il δ corrispondente. Trovo poi $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$d_x(x_n, x_0) \leq \delta \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora

$$d_y(f(x_n), f(x_0)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$



$\Rightarrow$ Per assurdo supponiamo f NON continua ϵ - δ in x_0 .
Neghiamo:

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \text{ con } d_x(x, x_0) \leq \delta \text{ e } d_y(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon_0$$

La uso con $\delta = \frac{1}{n}$ e ottengo $x_n \in X$ con

$$\underbrace{d_X(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n}}_{x_n \rightarrow x_0} \quad \text{e} \quad \underbrace{d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0}_{\text{non può essere } f(x_n) \rightarrow f(x_0)}$$

$x_n \rightarrow x_0$

non può essere $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

— 0 — 0 —

Def. Due distanze d_1 e d_2 in un insieme X si dicono equivalenti se e solo se inducono la stessa nozione di convergenza, cioè per ogni successione x_n e ogni punto x_∞ vale

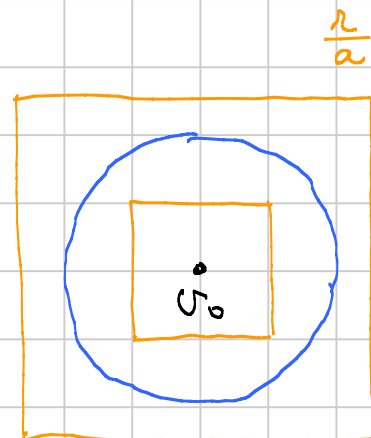
$$d_1(x_n, x_\infty) \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad d_2(x_n, x_\infty) \rightarrow 0$$

Def. Due norme $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ su uno spazio vettoriale V si dicono equivalenti se esistono due costanti $A \geq a > 0$ tali che

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq A \|x\|_1 \quad \forall x \in V$$

In termini di palle questo vuol dire che ogni palla di raggio r rispetto alla norma $\| \cdot \|_2$ è

- contenuta in una palla di raggio $\frac{r}{a}$ rispetto alla $\| \cdot \|_1$
- contiene una palla di raggio $\frac{r}{A}$ rispetto alla $\| \cdot \|_1$



Dim. $\|x\|_2 \leq r$, allora $a \|x\|_1 \leq r$
 $\Rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{r}{a}$
e analogo dall'altra parte.

Esempio In $\mathbb{R}^n$ l'euclidea e la taxi driver sono equiv. e

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Teorema Due qualunque norme su uno sp. vett. di dim. FINITA sono equivalenti.

La dimostrazione è un corollario di

Teorema Una qualunque norma su $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla Euclidea.

Dim. Sia $\|x\|$ una norma qualunque su $\mathbb{R}^n$. Voglio dimostrare che esistono a ed A tali che

$$a \|x\| \leq \|x\|_2 \leq A \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↖ Euclidea ↗

Ci basta dimostrare che esistono $a > 0$ ed $A > 0$ t.c.

$$a \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \leq A \quad \forall x \text{ con } \|x\|_2 = 1$$

Questo è vero per omogeneità della funzione $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|_2}$.

Ora la sfera $\|x\|_2 = 1$ è compatta, ma ci manca (per ora) la continuità di $f(x)$.

Step 1 Mostro a mano la disug. di dx. Prendo $x \in \mathbb{R}^n$ e lo scrivo nella base canonica

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$$

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|c_k e_k\|$$

↑
triangolare
+ inclusione

$$= \sum_{k=1}^m |c_k| \cdot \|e_k\|$$

$$= \sum_{k=1}^m |c_k| \cdot \frac{\|e_k\|}{\|e_k\|} \cdot \frac{1}{\|e_k\|}$$

Ho usato che
siamo
in dim.
finita

≤ costante C

$$\leq C \sum_{k=1}^m |c_k|$$

$$\leq \underbrace{C \sqrt{m}}_A \left(\sum_{k=1}^m c_k^2 \right)^{1/2}$$

$$= A \|x\|$$

Step 2 La funzione $x \rightarrow \|x\|$ è continua rispetto alla $\|x\|$.
Dimostro pure la Lip:

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq A \|x - y\|$$

↑ ↑
triangolare Step 1

Step 3 La funzione $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|}$ è continua rispetto alla $\|x\|$
quindi assume max/min sulla sfera della $\|\cdot\|$.
Il min è > 0 perché è il valore assunto per un certo x .

— 0 — 0 —

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI 3 facce

① Compattezza per successioni Uno sp. metrico (X, d) è compatto per succ. se ogni succ. ammette una s.succ. convergente: per ogni $\{x_n\} \subseteq X$ esiste $n_k \rightarrow +\infty$ str. cresc. e $x_\infty \in X$ t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

- ② Compattezza per ricoprimenti (X, d) è eq. per ric. se ogni ricoprimento aperto ammette s. ric. finito.

Def. Uno sp. metrico (X, d) si dice

- LIMITATO se $\sup \{ d(x, y) : (x, y) \in X^2 \} < +\infty$
 $\text{diam}(X)$

o in modo equiv.: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $d(x, y) \leq M$ per ogni $(x, y) \in X^2$

- TOTALMENTE LIMITATO se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una ε -rete, cioè un sottoinsieme finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ tale che

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

↑
palle con centro x_i
e raggio ε

(gli x_i sono dei distributori e ognuno ha un distributore a distanza $\leq \varepsilon$ da casa)

Relazione ovvia (ma un po' troppo):

Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato

Il viceversa è falso: la distanza discreta su un insieme infinito ($\text{diam} = 1$, ma non esiste ε rete con $\varepsilon < 1$).