

DIMOSTRAZIONI DI GAUSS-GREEN IN DIMENSIONE 2

Teo. divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Se poniamo $\vec{E} = (A, B)$ si può riscrivere come

$$\iint_{\Omega} (A_x + B_y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} (-B \, dx + A \, dy)$$

curva o insieme di curve che percorrono $\partial\Omega$ con l'orientazione giusta

Corollario (Dimenticato a suo tempo)

Data $f(x, y)$ e dato $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vale la formula

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Dim Posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$, allora $\frac{\partial f}{\partial v} = v_1 f_x(x, y) + v_2 f_y(x, y)$

Applico teo. divergenza con $\vec{E} = (v_1 f, v_2 f)$. Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial v} \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds & \vec{n} = (n_1, n_2) \\ &= \int_{\partial\Omega} (v_1 f n_1 + v_2 f n_2) \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, ds. \quad \square \end{aligned}$$

CASI SPECIALI DEL TEO. DIV.

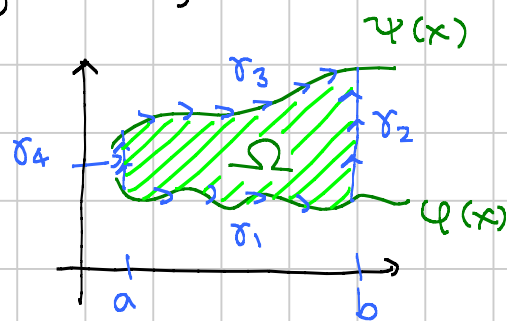
Caso di insieme normale risp. asse x Supponiamo

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

Voglio dimostrare due formule

$$\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -B dx$$

$$\iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy$$



Dim. con B

$$\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy [B_y(x, y)]$$

$$= \int_a^b dx [B(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}$$

$$= \int_a^b [B(x, \psi(x)) - B(x, \varphi(x))] dx$$

$$\iint_{\partial\Omega^+} -B(x, y) dx = - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = (*)$$

dove

$$\gamma_1(t) = (t, \varphi(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_2(t) = (b, t) \quad t \in [\varphi(b), \psi(b)]$$

$$\gamma_3(t) = (t, \psi(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_4(t) = (a, t) \quad t \in [\varphi(a), \psi(a)]$$

$$(*) = - \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} = - \int_a^b B(t, \varphi(t)) dt + \int_a^b B(t, \psi(t)) dt$$

e questo dimostra la formula.

Dim A

$$\iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy = \int_a^b dx \underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy}$$

Introduco una nuova funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, y) dy \quad (\text{integrale dipendente da parametro})$$

Calcolo

$$H'(x) = \frac{dH}{dx} = \underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy} + A(x, \psi(x)) \psi'(x) - A(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$$

vado a sostituire sopra

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \left\{ \frac{dH}{dx}(x) - A(x, \psi(x)) \psi'(x) + A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \right\} \\ &= - \int_a^b A(x, \psi(x)) \psi'(x) dx + \int_a^b A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) dx + H(b) - H(a) \end{aligned}$$

Vado ora a calcolare il pezzo di bordo:

$$\int_{\partial\Omega^+} A(x, y) dy = \int_{\sigma_1} + \int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_3} - \int_{\sigma_4}$$

$$\int_{\sigma_1} A(x, y) dy = \int_{\varphi(b)}^b A(t, \varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\sigma_2} A(x, y) dy = \int_{\varphi(b)}^b A(b, t) dt = H(b)$$

Analogamente

$$\int_{\sigma_4} A(x, y) dy = -H(a) \quad \text{e} \quad \int_{\sigma_3} A(x, y) dy = \text{pezzo mancante}$$

— o — o —

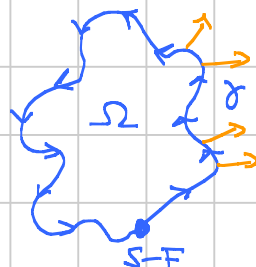
Analogamente si dimostra il teo. della div. negli insiemi normali rispetto all'asse y . (Fare per esercizio)

Interpretazione ciclistica del teo. div.

Se faccio un giro in bici e sento sempre il vento provenire da destra (o da sinistra), allora di sicuro il campo velocità del vento non può avere divergenza nulla!

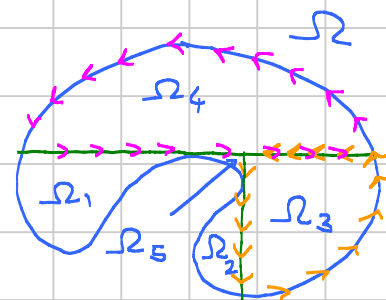
Se il vento viene da dx, allora $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle < 0$ su tutta la curva, quindi

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy < 0$$



Conclusione **MOLTO BRUTALE** della dimostrazione nel caso generale

→ Dato un insieme qualunque Ω (con frontiera ragionevolmente regolare) lo posso suddividere come unione di insiemi normali



→ In ogni sottoinsieme Ω_i applico il teo. div. che so essere vero

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy &= \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_i} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial \Omega_i} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \end{aligned}$$

L'ultima somma è fatta da pezzi di $\partial \Omega$ percorsi con il verso giusto, e dai vari tratti intermedi aggiunti fatti due volte con due versi opposti, e che quindi si cancellano.

Notazione

Spesso i fisici usano notazioni diverse per divergenza, laplaciano, rotore.

In particolare

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}} = (\partial_x, \partial_y) \cdot (A, B) = A_x + B_y = \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\boxed{\nabla^2 f} = f_{xx} + f_{yy} = \Delta f$$

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{E}} = \operatorname{rot} \vec{E} \quad (\text{in fondo è la matrice che calcola } \operatorname{rot} \vec{E})$$

— o — o —

Teorema (esercizio) Se vale il teo. della divergenza in un insieme Ω , allora vale in un insieme Ω' ottenuto ruotando Ω di un angolo a piacere.

