

TEOREMA DI GAUSS - GREEN

Caso nel piano $m=2$

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

↑
vettore normale
esterno ad Ω

Si intende che

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato con $\partial\Omega$ abbastanza regolare
- $f: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione suff. regolare con $\hat{\Omega} \supseteq \bar{\Omega}$
- $E: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo di vettori suff. regolare

Ora

- al LHS c'è l'integrale doppio di una funzione
- il primo termine al RHS è un integrale curvilineo di una funzione
- il secondo termine al RHS è l'integrale doppio di una funzione.

— o — o —

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sempre in $\mathbb{R}^2$

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Dim. (Del teo. div. detto Gauss-Green) Prendo $f(x,y) := 1$.

Esercizio Data una funzione f ed un campo E , calcolare $\operatorname{div}(f\vec{E})$

$$\operatorname{div}(f\vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

Direttamente in $\mathbb{R}^n$: $\vec{E} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$
 $f\vec{E} = (fA_1, fA_2, \dots, fA_n)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\vec{E}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (fA_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot A_k + f \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot A_k}_{\langle \nabla f, \vec{E} \rangle} + \underbrace{f \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_k}}_{f \operatorname{div} \vec{E}} \end{aligned}$$

Dim. (di Gauss-Green a partire dal teorema della div).

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \quad (\text{teo. div.})$$

Lo applico con $f\vec{E}$ al posto di $\vec{E}$. Al LHS

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) \, dx \, dy = \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy$$

↑
esercizio

Al RHS ottengo

$$\int_{\partial\Omega} \langle f\vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Riorganizzando i termini ottengo G-G. $\square$

Corollario di G.G. Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \, dy$$

dove $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Dim. Basta usare GG con $f = v$ e $\vec{E} = \nabla u$

$$\begin{array}{ccccc} \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy & = & \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds & - & \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \int_{\Omega} \underbrace{v \operatorname{div} (\nabla u)}_{\text{"}\Delta u\text{"}} & & \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds & & \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle \end{array}$$

— o —

Oss. $\langle \nabla u, \vec{n} \rangle$ è la derivata di u nella direzione uscente da Ω .

— o — o —

In dimensione 2, l'integrale sul bordo può essere interpretato usando le forme diff.

Prendiamo il teo. della div. con $\vec{E} = (A, B)$:

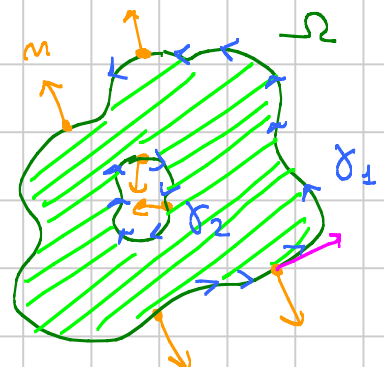
$\operatorname{div} \vec{E}$

$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle$

$$\int_{\Omega} (Ax + By) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (A \cdot m_1 + B m_2) \, ds \quad \vec{n} = (m_1, m_2)$$

Prendiamo nel disegno due curve γ_1 e γ_2 che percorrono il bordo.

Se le curve percorrono il bordo $\partial\Omega$ lasciandosi Ω a sinistra, allora $\vec{n}$ si ottiene ruotando di 90° in senso ORARIO il vettore tangente alla curva.



Quindi se $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ come sopra $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$
 $t \in [a, b]$

$$\text{vettore tangente} = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right)$$

e infine

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

↑
algebra
lineare

Ma allora

$$\int_{\partial\Omega} (A n_1 + B n_2) ds = \int_a^b \left(A \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \int_a^b (A \dot{y} - B \dot{x}) dt$$

$$= \int_{\gamma} \underbrace{(-B dx + A dy)}_{\text{forma differenziale}}$$

curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando
 Ω a sinistra

Conclusione

$$\int_{\Omega} (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (-B dx + A dy)$$

↑
curva che percorre $\partial\Omega$
lasciandolo a sx.

↑
forma

Oss.1 "Lasciare Ω a sinistra" è un modo brutale di dire che $\{\vec{m}, \vec{o}\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ orientata come quella canonica.

Oss.2 GG è la formula di integrazione per parti degli integrali multipli.