

TEOREMA 2 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE.

Sia ω una forma diff. in Ω CHIUSA.

Siano γ_1 e γ_2 due curve a valori in Ω di classe C^1 a tratti, con gli STESSI ESTREMI e OMOTOPE.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Corollario Se Ω è sempl. connesso e ω è chiusa, allora ω è esatta.

Dim. In $\mathbb{R}^2$ sotto ipotesi legg. più forti (in apparenza), cioè γ_1 e γ_2 curve C^1 con omotopia C^1 e oltre.

Fissiamo le notazioni:

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$$A_y = B_x$$

Omotopia la indico con $(x(t,s), y(t,s))$

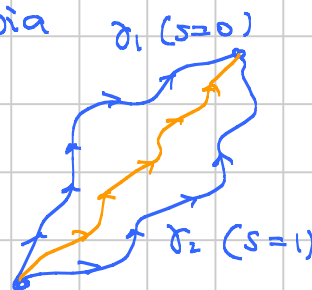
↑
parametro che
descrive l'omotopia

$$\gamma_1(t) = (x(t,0), y(t,0))$$

$$t \in [a,b]$$

$$\gamma_2(t) = (x(t,1), y(t,1))$$

$$t \in [a,b]$$



Definisco

$$\varphi(s) := \int_{\gamma_s} \omega$$

$$\gamma_s(t) = (x(t,s), y(t,s))$$

$$= \int_a^b [A(x(t,s), y(t,s)) x_t(t,s) + B(x(t,s), y(t,s)) y_t(t,s)] dt$$

La tesi è equivalente a dimostrare che $\varphi(s)$ è costante, cioè $\varphi'(s) = 0$ per ogni $s \in [0, 1]$.

Questo è un integrale dipendente da parametro (sì il param., t da variabile di integrazione)

$$\varphi'(s) = \int_a^b [A_x x_s x_t + A_y y_s x_t + A x_{ts} + B_x x_s y_t + B_y y_s y_t + B y_{ts}] dt$$

Niente panico! Integrare per parti i termini con la deriv. 2^a.

$$\int_a^b A x_{ts} dt = \int_a^b A (x_s)_t dt = [A x_s]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} A \cdot x_s dt$$

si annulla
 per $t=a$ e $t=b$
 perché gli estremi sono fissi

$$= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} A \cdot x_s dt = - \int_a^b (A_x x_t + A_y y_t) x_s dt$$

$$= - \int_a^b [A_x x_t x_s + \underbrace{A_y y_t x_s}_B] dt$$

Analogamente integrando per punti B e s si eliminano gli altri due termini. $\square$

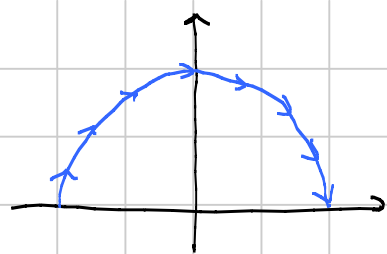
Esercizio Rifare le dim. dei teoremi 1 e 2 in n variabili (esercizio di gestione degli indici).

COME calcolo l'integrale di una forma lungo una curva?

- ① Formula usata brevemente
- ② Formula dopo aver riparametrizzato la curva
- ③ Esattezza + primitiva
- ④ Chiusura + scelta curva omotopa a quella data

Esempio 1 $\omega = x^2 y dx + y^2 dy$

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



ω non è chiusa, quindi non è esatta, quindi ③ e ④ esclusi. La ① sembra calcolosa.

Provo la ② usando la parametrizzazione $\overbrace{(\cos t, \sin t)}^{\gamma_1(t)}$ con $t \in [0, \pi]$. Achtung! Il verso è diverso, quindi metto segno -:

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega = - \int_0^{\pi} [\cos^2 t \sin t (-\sin t) + \sin^2 t \cdot \cos t] dt =$$

si fa

↑
perché stessa curva, solo
in verso opposto

↑
formula

[Provare a vedere che succede con la ①]

Esempio 2 $\omega = xy^2 dx + (x^2 y + y^3) dy$

$$\gamma(t) = (te^t, t^2 \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$A_y = 2xy \quad B_x = 2xy \Rightarrow$ è chiusa $\Rightarrow$ su tutto $\mathbb{R}^2$ è esatta 😊

Cerco a occhio una primitiva

$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + C(y)$$

$$F_y(x, y) = x^2 y + \boxed{C'(y)} = x^2 y + y^3$$

Quindi una primitiva è

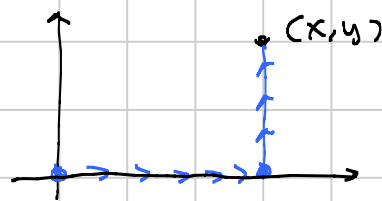
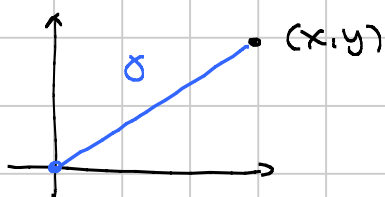
$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(\pi e^{\pi}, 0) - F(0, 0) =$$

banale sostituzione.

Oss. Se uno è disperato, saputo che ω è esatta può cercare la primitiva integrando lungo una curva che congiunge un p.to base (x_0, y_0) (magari l'origine) con il p.to generico (x, y) .

Curve furbe:



Esempio 3 $\omega = xy^2 dx + (x^2y + e^{y^2}) dy$

$$\gamma(t) = (te^t, t^2 \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

Come prima ω è esatta e una primitiva è

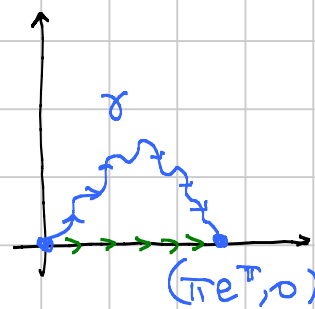
$$\frac{1}{2} x^2 y^2 + \text{primitiva di } e^{y^2} \dots$$

Posso lasciarla indicata e vedere cosa succede, oppure uso strategia ④ perché la forma è chiusa.

Sostituisco γ con la direttissima

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi e^\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{\pi e^\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula}}}{0} dt = 0 !!!$$



[Vedere che succedeva con la strategia ①!]

Esempio 4

$$\omega = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x^2 \right) dx + \left(y^3 - \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy$$

$\gamma(t)$ è la curva descritta in coord. polari da

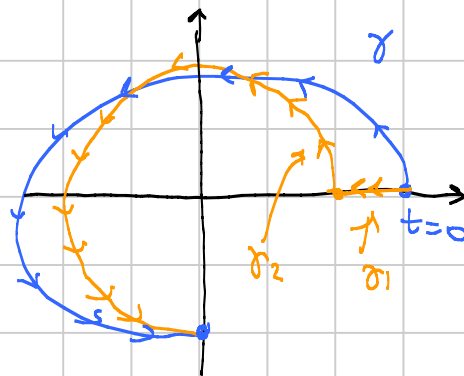
$$\rho(t) = 3 + \sin t$$

$$\theta(t) = t$$

$$t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$$

Volendo

$$\gamma(t) = \left(\underbrace{(3 + \sin t) \cos t}_{x(t)}, \underbrace{(3 + \sin t) \sin t}_{y(t)} \right)$$



Si vede che ω è chiusa, ma non esatta su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Cerco una curva omotopa a γ una più semplice

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [2, 3]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$$

Entrambi si calcolano usando la formula

Oss. 1 Se uno non è così convinto che siano omotope, o non ha voglia di dimostrarlo, può usare l'esattezza in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{semiretta}$ che è sempl. connesso in quanto stellato e lì due curve qualunque danno lo stesso integrale.

Oss. 2 Chi vuole risparmiare può anche girare in senso opposto, ma tenendo conto del $\pm 2\pi$.

— o — o —