

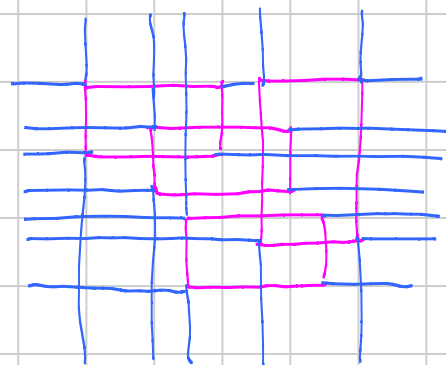
Proposizione (criterio di integrabilità) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono φ_ε e ψ_ε in $SF(\mathbb{R}^2)$ t.c.

$$\varphi_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi_\varepsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\underbrace{\psi_\varepsilon(x, y) - \varphi_\varepsilon(x, y)}_{\in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } \geq 0}] dx dy \leq \varepsilon$$

Oss. Posso sempre supporre φ_ε e ψ_ε ottenuta a partire da una stessa "rettangolazione" di $\mathbb{R}^2$



Proprietà semplici delle funzioni integrabili

① L'insieme delle funs. int. è uno sp. vett. e l'integrale è un'applic. lineare (LINEARITÀ)

[Dim. date f e g , prendo step. funct. sopra e sotto per f e g e poi le sommo]

② (MONOTONIA) Se f e g sono integrabili e $f \leq g$ su $\mathbb{R}^2$, allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy$$

[Dim. Tutte le s.f. superiori per g sono buone anche per f]

③ (VALORE ASSOLUTO) f integrabile $\Rightarrow |f|$ integrabile e

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$$

[Dim. prendo φ_ε e ψ_ε per f e costruisco opportune $\hat{\varphi}_\varepsilon$ e $\hat{\psi}_\varepsilon$ per $|f|$ decidendo rettangolo per rettangolo

- se $f \geq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$
- se $f \leq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = -\psi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$
- se f ha segno variabile in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = 0$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \max\{\varphi_\varepsilon, -\varphi_\varepsilon\}$

Si verifica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi}_\varepsilon - \hat{\varphi}_\varepsilon \leq \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \quad]$$

④ (Proprietà di reticolo) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

[Dim. Ci sono 2 possibili approcci:

- costruire s.f. sopra e sotto opportunamente
- basarsi sul val. assoluto

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(|x-y| + x+y) \text{ e idem per min. }]$$

⑤ (PRODOTTO) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integrabile (e basta: non c'è formula per integrale del prodotto)

[Dim. Due fasi

- se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ si lavora con le step. functions aggiungendo e togliendo il termine misto
- se f e g sono a segno variabile, introduco parti positive e negative

$$f = f^+ - f^-$$

$$f^+ \geq 0, f^- \geq 0$$

$$g = g^+ - g^-$$

$$g^+ \geq 0, g^- \geq 0$$

e moltiplico tutto, oppure osservo che

$$fg = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

ora f int. $\Rightarrow |f|$ int. e $\geq 0 \Rightarrow f^2$ int.

⑥ Additività rispetto alla zona di integrazione

Se f è integrabile in A e in B con $A \cap B = \emptyset$, allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale

$$\iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A \dots + \iint_B \dots$$

[Dim. non c'è nulla da fare se non osservare che su tutto $\mathbb{R}^2$ si riduce alla somma di funzioni]

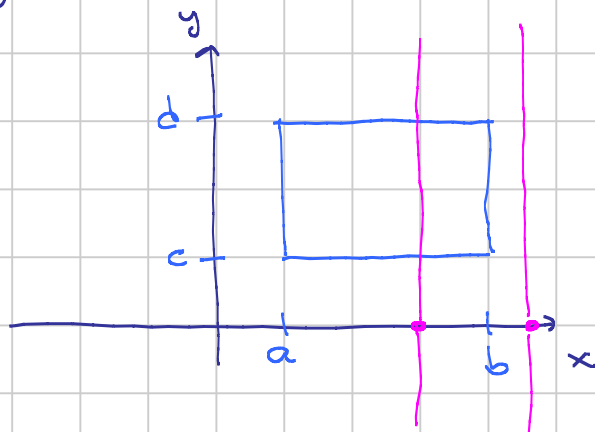
FORMULA DI RIDUZIONE (FUBINI o FUBINI-TONELLI)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.
Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

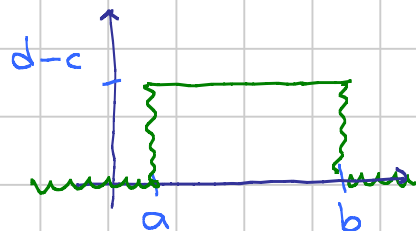
[Dim.] Caso banale: $f(x,y)$ = funzione caratteristica di rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

RHS e LHS sono $(b-a) \times (d-c)$ per definizione, senza super. o inferiore.
Esaminiamo i 2 termini centrali



Fissato x

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ d-c & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$



quindi è a sua volta una step function nella variabile x
Quando integro rispetto ad x ottengo

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y) = (b-a)(d-c)$$

senza bisogno di inferiori o superiori.

Quindi vale la formula con tutti uguali.

Caso semibianale : $f(x,y) \in SF(\mathbb{R}^2)$

Truccaccio : considero $f \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$

$$f \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y)$$

Sono due applicazioni lineari $SF(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ che coincidono su una base (le caratteristiche di rettangoli). Quindi coincidono, quindi ancora una volta la formula vale con tutti =.

Caso generale prendo f qualunque e prendo una qualunque $\varphi \in SF(\mathbb{R}^2)$ con $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$ sempre.

Allora per ogni x fissato vale

$$\int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy$$

$\uparrow$
perché $f \leq \varphi$ sulla colonna verticale

Ma allora

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy$$

Facendo l'inf su tutte le $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ in SF, a destra ottengo

$$\int_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy.$$

Per concludere basta osservare che

- la disug. a sx si fa uguale con le SF dal basso
- quella centrale è banale perché

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

— o — o —

Esercizio (Hard?) Trovare un esempio in cui i 4 numeri sono diversi (addirittura assegnati).

Esempio 1 Trovare $f(x,y)$ con $\int_{\mathbb{R}^2}^* f \neq \int_{+\mathbb{R}^2} f$

Posso prendere $f(x,y) = 0$
 $f(x,y) = 1$
 $f(x,y) = 0$

fuori da $[0,1] \times [0,1]$
 se $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ e $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$
 altrimenti

Esempio 2

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esempio 3

f non integrabile, ma i due termini centrali coincidono e senza bisogno di integrali inferiori e superiori.

