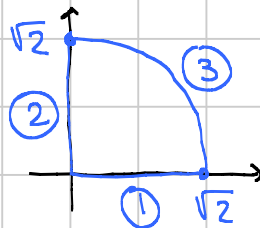


Esempio 1 $\max/\min \{ x^2 y : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0 \}$

$W \Rightarrow \max$ e $\min$. esistono



$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$ i pti stazionari
sono tutti e soli i pti dell'asse y
 $\Rightarrow$ infiniti pti stazionari

$\leadsto$ nessuno stazionario interno!

$\leadsto$ nessun singolare interno

Bordo: 2 pezzi con parametrizz, 1 pezzo con moltiplicatori

① e ②

③

① : $\{(t, 0) : t \in [0, \sqrt{2}]\}$

② : $\{(0, t) : t \in [0, \sqrt{2}]\}$

} su questi pezzi $f \equiv 0$

③ $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \leadsto$ nessuna soluz. o sistema

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2xy = 2\lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$x(y - \lambda) = 0 \leftarrow 1^a \text{ equ.}$

$x = 0$

$\downarrow 3^a \text{ equ.}$

$y = \pm \sqrt{2}$

$\downarrow$
 $(0, \pm \sqrt{2})$

$y = \lambda$

$\downarrow 2^a \text{ equ.}$

$x^2 = 2y^2$

$\downarrow 3^a \text{ equ.}$

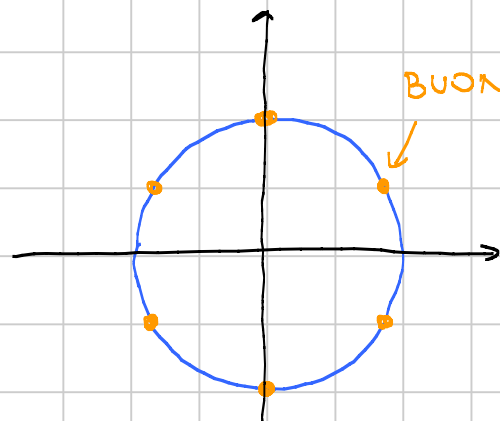
$3y^2 = 2$

$\downarrow$
 $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$



4 pti

In conclusione nel nostro caso i candidati sono

→ tutti i pti dei pezzi ① e ② $\leadsto f(x,y) = 0$

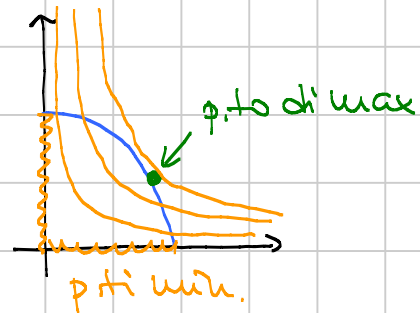
→ il pto $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \leadsto f(\dots, \dots) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$$\text{Max} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{pt. di max} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

min = 0 pti di min = tutti i pti dei pezzi ① e ②

Linee di livello : $x^2y = \lambda$

$$y = \frac{\lambda}{x^2}$$



Esempio 1-bis max/min $\{x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 : (x,y) \in \text{insieme di prima}\}$

Se imposto il sistema con i moltiplicatori, vengono LHS omibili.

In realtà però

$$\hat{f}(x,y)$$

$$\underbrace{x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{f(x,y)} = x^2y + (x^2 + y^2)^2 = \overbrace{x^2y + 4}^{\hat{f}(x,y)} \text{ sulla circonferenza}$$

Tecnica di SOSTITUZIONE DEL VINCOLO : "semplificare" la funzione f da studiare trovando una funzione più semplice che coincide con f nei pti di V .

Ovviamente cambia la parte stazionari e singolari interni.

Nell' esempio si può procedere così

min = 0 con unico pto di min (0,0). Infatti

$f(0,0) = 0$ e per ogni altro (x,y) si ha

$$f(x,y) = \underbrace{x^2y}_{\geq 0} + (x^2 + y^2)^2 \geq \underbrace{(x^2 + y^2)^2}_{\geq 0} > 0 \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

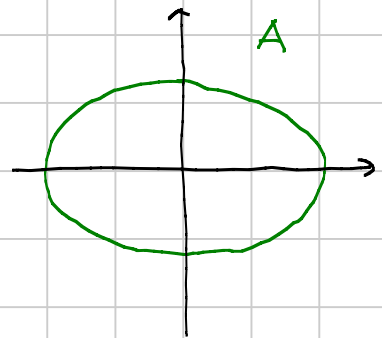
$\max = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ con unico p.to di max.

Infatti per ogni altro p.to

$$f(x, y) = \underbrace{x^2 y}_{\substack{\leq \text{valore} \\ \text{nel p.to} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}} + \underbrace{(x^2 + y^2)^2}_{\leq 4} < f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Oss. Se il problema fosse stato $\max/\min \{x^2 y + \dots : (x, y) \in \textcircled{3}\}$ conveniva fare i moltiplicatori su $\hat{f}(x, y)$ invece che su $f(x, y)$.

Esempio 2 $\max/\min \{ \underbrace{|x^2 - y|}_{f(x, y)} : \underbrace{x^2 + 2y^2 \leq 5}_{\text{ellisse}} \}$



Valore assoluto $\rightsquigarrow$ p.ti singolari interni

A è compatto: $\rightarrow$ limitato perché $A \subseteq [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]^2$
 $\rightarrow$ chiuso perché controimmagine di $[-\infty, 5]$ che è un chiuso

$W \Rightarrow \max$ e $\min$ esistono.

Semplificazione: STUDIO SENZA IL VALORE ASSOLUTO
e poi deduco

$$g(x, y) = x^2 - y \rightsquigarrow \text{viene stud. e sing. interni}$$

Bordo: 1° sistema non ha soluzioni

$$2^\circ \text{ sistema } \begin{cases} g_x = \lambda \phi_x \\ g_y = \lambda \phi_y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

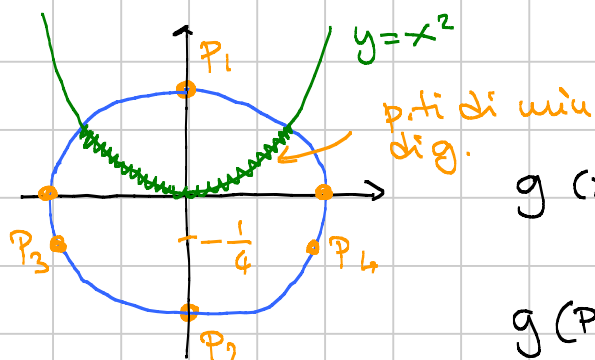
$$2^a \text{ equ} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4y} \Rightarrow \cancel{2}x = \cancel{2}\left(-\frac{1}{4y}\right)x ; 4xy = -x$$

2^a equ.

$$\nearrow x=0 \leadsto y^2 = \frac{5}{2} \leadsto y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\searrow 4y = -1 \leadsto y = -\frac{1}{4} \leadsto x^2 + \frac{2}{16} = 5 \leadsto \text{trovo } x^2 = \frac{78}{16}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{39}}{4}$$



$$g(x, y) = x^2 - y$$

$$g(P_1) = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2}} \quad \text{min } g$$

$$g(P_2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$g(P_3) = g(P_4) = \frac{78}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{82}{16}} \quad \text{max di } g$$

$$\max f = \frac{82}{16} \quad (\text{che ha battuto } \frac{\sqrt{5}}{2}) \quad \text{p.ti di max: } P_3 \text{ e } P_4$$

min $f = 0$ p.ti di min. gli infiniti p.ti in cui si annulla $g(x, y)$, cioè tutti i p.ti della parabola $y = x^2$ che cascano nell'ellisse.

Esempio 3 $f(x, y, z, w) = \frac{x^2 y z^2}{x^4 + y^4 + z^4 + w^4}$

limite di f per $(x, y, z, w) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$

Due approcci: introduco coord. polari in $\mathbb{R}^4$ oppure

$$|f(x, y, z, w)| = |x| \cdot \boxed{\frac{xyz^2}{x^4 + y^4 + z^4 + w^4}}$$

se fosse $\leq M$ per

$(x, y, z, w) \neq (0, 0, 0, 0)$ concluderei con i carabinieri

La funzione (2^a) è omogenea di grado, quindi

$$\max \{ g(x) : x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \} = \max \{ g(x) : x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 1 \}$$

$M \in \mathbb{R}$ per Weierstrass.

— 0 — 0 —