

Derivate successive per funzioni di più variabiliEsempio $f(x, y) = x^2 + 7x \sin y$

$$f_x(x, y) = 2x + 7 \sin y$$

$$f_y(x, y) = 7x \cos y$$

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 7 \cos y$$

$$f_{yx}(x, y) = 7 \cos y$$

$$f_{yy}(x, y) = -7x \sin y$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0$$

$$f_{yxx}(x, y) = 0$$

$$f_{xyx}(x, y) = 0$$

$$f_{yyx}(x, y) = -7 \sin y$$

Oss. Per una funzione di 2 variabili, le possibilità per le derivate parziali k -esime sono 2^k . Per una funzione di n variabili sono n^k .

Notazione

$$f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\partial_{xx} f$$

$$D_{xx} f$$

$$f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

dopo prima

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\partial_{xy} f$$

$$D_{xy} f$$

Fatto generale : $\rightarrow$ ci sono esempi in cui $f_{xy} \neq f_{yx}$
 $\rightarrow$ sotto ipotesi del tutto ragionevoli vale $f_{xy} = f_{yx}$

Condizione Sotto ipotesi ragionevoli, una qualunque derivata k -esima per una funzione di n variabili dipende solo da quante volte ho derivato rispetto ad ogni variabile, e non dall'ordine di esecuzione delle operazioni:

$$f_{xxyx} = f_{yxxx} = f_{xxxy}$$

$$f_{xxyz} = f_{yxxz} = f_{xzyx} = \dots$$

Conseguenza Sotto le ipotesi ragionevoli, le derivate k -esime di una funzione di 2 variabili sono $(k+1)$. Ad esempio quelle terze sono

$$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad f_{xyy} \quad f_{yyy}$$

Esercizio Quante sono le k -esime di una funzione di n variabili

Osservazione Basta dimostrare che $f_{xy} = f_{yx}$ per funzioni di 2 variabili per avere il risultato in generale (le altre le posso pensare fissate).

Teorema (Inversione dell'ordine di derivazione - Schwarz)

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f: \underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)}_{R_\delta} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

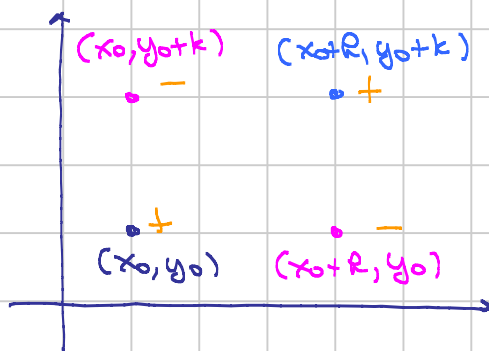
- (i) $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ esistono in tutto R_δ
- (ii) " " sono continue in (x_0, y_0)

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dim. Considero la funzione

$$g(R, k) = f(x_0 + R, y_0 + k) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0 + k)$$



Considero anche $\varphi(t) := f(x_0 + R, t) - f(x_0, t)$

$$\psi(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$$

Allora

$$g(R, k) = \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) \quad (\text{Lagrange su } \varphi(t))$$

$$= k \varphi'(y_0 + \alpha)$$

$$= k [f_y(x_0 + R, y_0 + \alpha) - f_y(x_0, y_0 + \alpha)] \quad (\text{Lagrange in } x)$$

$$= k R f_{xy}(x_0 + \beta, y_0 + \alpha)$$

Supponendo $k > 0, R > 0$ allora $0 < \beta < R$ e $0 < \alpha < k$

Analogamente $g(R, k) = \psi(x_0 + R) - \psi(x_0)$ (Lagrange su $\psi(t)$)

$$= R \psi'(x_0 + \delta)$$

$$= R [f_x(x_0 + \delta, y_0 + k) - f_x(x_0 + \delta, y_0)] \text{ Lagr in } y$$

$$= R k f_{yx}(x_0 + \delta, y_0 + \delta)$$

dove $0 < \delta < R$ e $0 < \delta < k$

Divido per Rk che sono $\neq 0$ e ho ottenuto

$$f_{xy}(x_0 + \delta, y_0 + \delta) = f_{yx}(x_0 + \delta, y_0 + \delta)$$

Ora faccio tendere $(R, k) \rightarrow (0, 0)$ e uso l'ipotesi (ii) ottenendo

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \square$$

Osservazione Non serve usare 2 parametri diversi, si può usare $k = R$.

Esempio in cui sono diverse

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prima osservazione: è ovvio che f_{xy} e f_{yx} esistono e coincidono per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

Nell'origine devo fare i conti diversamente.

Fatto 1 $f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$

[Moralmente è $\frac{p^4}{p^2}$]

Fatto 2 $f(x, y)$ è differenziabile in $(0, 0)$ e $\underline{f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0}$
 $f(x, y) = 0$ sugli assi

Dim. che è diff. 1° modo Uso la def. e mi riduco a far vedere che

$$f(R, k) = f(\overset{0}{\underset{||}{0}}, \overset{0}{\underset{||}{0}}) + f_x(\overset{0}{\underset{||}{0}}, \overset{0}{\underset{||}{0}})R + f_y(\overset{0}{\underset{||}{0}}, \overset{0}{\underset{||}{0}})k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Basta mostrare che $f(r, k) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, cioè che

$$\lim_{(a,k) \rightarrow 0} \frac{f(r,k)}{\sqrt{r^2+k^2}} = 0 \quad (e \quad \frac{p^4}{p^3})$$

2° modo Calcolo $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ ovunque e dim. che sono continue in $(0,0)$ + teo. diff. tot.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dots}{\dots} = - \frac{\text{stessa cosa scambiati } x \text{ e } y}{(x^2+y^2)^2}$$

Il fatto che f_x e $f_y \rightarrow 0$ per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ segue da $\frac{p^5}{p^4}$.

Fatto 3

$$f_x(0,y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y \Rightarrow f_{yx}(0,0) = -1$$
$$f_y(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1$$

↑ Diverse

Oss 1 Come vedere che $f_y(x,y) = -f_x(y,x)$

[Dim. osservo che $f(x,y) = -f(y,x)$, quindi

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = - \frac{\partial}{\partial y} f(y,x) = - \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \cdot \frac{\partial y}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\dots) \cdot 0$$

↑ chain rule

$$= - \frac{\partial f}{\partial x}(y,x). \quad]$$

Oss. 2 "Costruttore di controesempi a Schwarz".

Prendo una $g(x,y)$ con limiti diversi a $(0,0)$ sull'asse x e sull'asse y .

Poi pongo

$$f(x,y) = xy g(x,y)$$

Se g non è troppo orribile funziona !!!