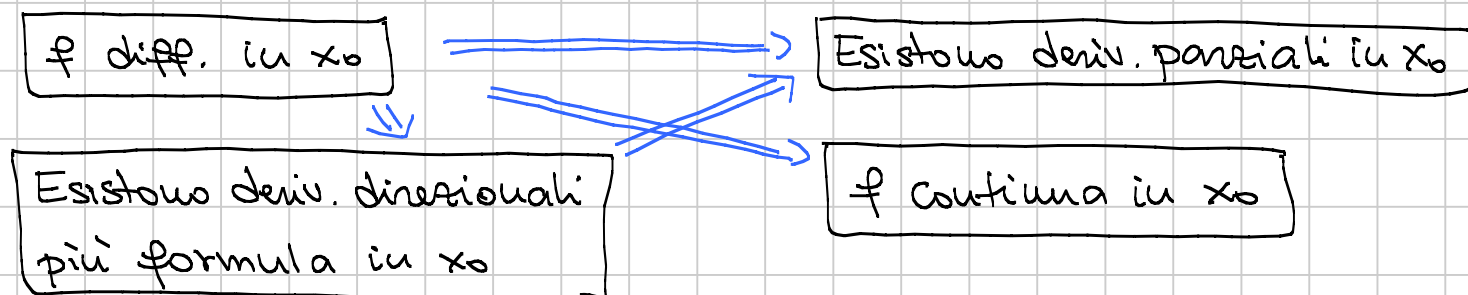


Quando dei risultati $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$



Ogni altra implicazione è in generale FALSA.

Def. Si dice GRADIENTE di f nel p.to x_0 il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f .

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{NABLA}}}{\nabla} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Teorema Siano D, f, x_0 come sopra.

Supponiamo che f sia differenziabile in x_0

Allora

(i) f è continua in x_0

(ii) esistono le derivate parziali in x_0 e l' α della definizione di diff. è proprio $\nabla f(x_0)$, quindi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + o(h)$$

(iii) esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

formula per le derivate direzionali date le derivate parziali

Dim. (i) Devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 Pongo $R = x - x_0$
 e diventa $\lim_{R \rightarrow 0} f(x_0 + R) = f(x_0)$

D'altra parte per definizione di differenziale

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, R \rangle}_{\downarrow 0 \text{ per } R \rightarrow 0} + \underbrace{o(|R|)}_{\downarrow 0 \text{ per } |R|}$$

(ii) + (iii) Uso la def. di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \text{numeri}}} \frac{f(x_0 + \overbrace{tv}^R) - f(x_0)}{t}$$

D'altra parte se uso la def. di diff. con $R = tv$ ottengo

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} &= \frac{\cancel{f(x_0)} + \langle \alpha, tv \rangle + r(tv) - \cancel{f(x_0)}}{t} \\ &= \frac{\cancel{t} \langle \alpha, v \rangle}{\cancel{t}} + \frac{r(tv)}{t} \\ &= \langle \alpha, v \rangle + \underbrace{\frac{r(tv)}{t|v|}}_{\frac{r(R)}{|R|} \rightarrow 0} |v| \rightarrow \langle \alpha, v \rangle \end{aligned}$$

Back to (ii): se uso $v = e_i$ ottengo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i = i\text{-esima componente di } \alpha$$

Quindi le componenti di α sono le derivate parziali, quindi
 $\alpha = \nabla f(x_0)$.

— o — o —

Praticamente:

- ① Come calcolo le derivate parziali?
- ② " " " " direzionali?
- ③ Come dimostro la differenziabilità?

① O uso la definizione, oppure quando posso uso le classiche regole di derivazione stile analisi 1.

Esempi $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$ $f_x = 2x + 4y$
 $f_y = 6y + 4x$

$$f(x, y) = y \sin(x^2 y) \quad f_x = y \cos(x^2 y) \cdot 2xy$$
$$f_y = 1 \cdot \sin(x^2 y) + y \cos(x^2 y) \cdot x^2$$

$$f(x, y) = x^y \quad f_x = y x^{y-1}$$
$$f_y = x^y \log x$$

Mi raccomando, fare esercizi (sono derivate in 1 variabile)

② O uso la definizione, oppure se ho una risposta affermativa a ③ uso la formula $\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

— o — o —

Significato geometrico del gradiente.

Domanda: per quali vettori v la derivata direzionale risulta max/min?

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = |\nabla f(x_0)| \cdot |v| \cdot \overset{\substack{\perp \\ \parallel}}{\cos \theta} \quad \text{angolo compreso}$$

Max per $\cos \theta = 1$, cioè $\theta = 0$

min per $\cos \theta = -1$, cioè $\theta = \pi$

Quindi: il gradiente è la direzione di massima salita per $f(x,y)$

Brutalmente: guardando la piantina, è la direzione in cui andare per salire

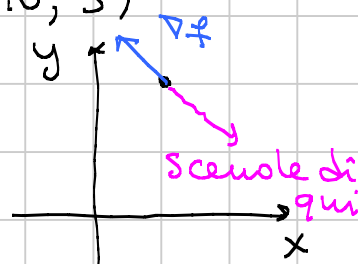
Esempio $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3x^2y$.

Mettiamo una pallina nel pto del grafico che corrisponde a $(1,2)$. In che direzione va la pallina.

$$\nabla f = (2x - 6xy, 3y^2 - 3x^2) \quad \nabla f(1,2) = (-10, 3)$$

La pallina va nella direzione opposta

— o — o —



③ O uso la definizione, o uso il seguente

Teorema (del DIFFERENZIALE TOTALE) $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x_0, y_0) \in \text{Int}(D)$

Supponiamo che

(i) le derivate parziali esistono in tutto D (intorno di (x_0, y_0))

(ii) le derivate parziali sono continue in (x_0, y_0) .

Allora f è differenziabile in (x_0, y_0)

— o — o —

Osservazione Il teorema precedente permette di stabilire la differenziabilità "tutte le volte che non ci sono problemi", ad esempio

$f(x,y) = x^3 \log y + \arctan(xy)$ è differenziabile su tutto il suo insieme di definizione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

Basta osservare che le derivate parziali non hanno problemi.

Oss. Le derivate parziali si possono scrivere in termini di o piccolo

$$f(x_0 + R e_i) = f(x_0) + \underbrace{f_{x_i}(x_0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)} R + o(R)$$

$$f(x_0 + R v) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) R + o(R)$$

La differenza rispetto al differenziale è che qui R è un numero, quindi $o(R)$ contiene un limite in dim. 1, mentre nel differenziale $R \rightarrow 0$ come vettore.

— 0 — 0 —

Notazione Nel caso di $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, chi è la matrice che rappresenta l'applicazione lineare?

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + M R + o(|R|)$$

Le righe di M sono i gradienti delle componenti di f , cioè

$$M_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

↑
riga i
colonna j

f_i = componente i -esima di f

M si dice MATRICE JACOBIANA di f

— 0 — 0 —