

A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 087. Successioni di funzioni: definizione di convergenza puntuale e uniforme. Primi esempi.	6
Lezione 088. Convergenza uniforme: teoremi di scambio dell'integrale e della derivata.	11
Lezione 089. Convergenza uniforme: teorema di scambio del limite. Continuità del limite uniforme di funzioni continue. Distanza nello spazio delle funzioni limitate che induce la convergenza uniforme.	17
Lezione 090. La convergenza puntuale implica la convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia (sia ad x fisso sia ad n fisso): enunciati e dimostrazioni.	23
Lezione 091. Convergenza uniforme sui compatti. Esercizio sulla convergenza in uno spazio di polinomi di grado limitato. Completezza o meno di spazi di funzioni rispetto ad opportune norme.	28
Lezione 092. Serie di funzioni. Convergenza totale: definizione e rapporti con la convergenza uniforme. M-test di Weierstrass. Convergenza totale come convergenza delle norme in uno spazio di Banach.	33
Lezione 093. Esercizi sulle serie di funzioni.	38
Lezione 094. Serie di potenze: definizioni, enunciato dei principali risultati, esempio pratico di utilizzo per il calcolo di speciali serie numeriche.	43
Lezione 095. Serie di potenze: dimostrazione dei risultati principali (struttura dell'insieme convergenza, formula per il calcolo del raggio di convergenza, teorema di Abel).	47
Lezione 096. Funzioni analitiche: definizione e criteri. Analiticità delle funzioni elementari: esponenziale, seno, coseno, logaritmo, arcotangente, potenza ad esponente reale.	52
Lezione 097. Prodotto di Cauchy di serie numeriche. Teorema sul prodotto tra una serie convergente ed una assolutamente convergente. Prodotto di serie di potenze. Analiticità del prodotto di funzioni analitiche.	57
Lezione 098. Esercizi sulle funzioni analitiche: complementi sul raggio di convergenza (è sempre il massimo possibile), l'insieme degli zeri è discreto, ordine finito in ogni punto e disuguaglianza di tipo Glaeser.	62
Lezione 099. Calcolo della somma di serie di potenze, calcolo alla Eulero della somma dei quadrati dei reciproci degli interi, stima delle derivate successive di una funzione analitica.	66

Lezione 100. Esercizi sulle successioni di funzioni: convergenza uniforme della composizione, limite uniforme di funzioni periodiche.	71
Lezione 101. Esercizi sulle serie di funzioni: limiti trattati mediante confronto serie-integrali e risoluzione per serie di una equazione alle derivate parziali.	76
Lezione 102. Equazioni differenziali: riepilogo notazioni, formulazione integrale di un problema di Cauchy (equazione di Volterra), enunciato del teorema di esistenza ed unicità (teorema CLPL: Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelof), enunciato del teorema di sola esistenza (teorema di Peano).	81
Lezione 103. Parte di esistenza del teorema CLPL: dimostrazione alla Cauchy-Lipschitz (via contrazioni senza tempo di vita ottimale) e alla Picard-Lindelof (via approssimanti di Picard, con tempo di vita ottimale).	86
Lezione 104. Parte di esistenza del teorema CLPL: dimostrazione mediante contrattività di una opportuna iterata della mappa di Picard e mediante contrazioni in uno spazio con norma pesata (entrambe con tempo di vita ottimale).	92
Lezione 105. Parte di unicità del teorema CLPL: dimostrazione mediante le contrazioni e mediante lemma di Gronwall. Successioni di funzioni equi-continue ed equi-uniformemente-continue.	97
Lezione 106. Teorema di Ascoli-Arzelà (versione standard sulla retta reale): enunciato e dimostrazione.	102
Lezione 107. Teorema di Ascoli-Arzelà (versione metrica e variante con sola convergenza sui compatti). Dimostrazione del teorema di Peano mediante problemi approssimanti Lipschitz.	107
Lezione 108. Dimostrazione del teorema di Peano con approssimanti alla Tonelli (problemi con ritardo). Approssimazione di funzioni continue mediante funzioni Lipschitz.	111
Lezione 109. Teorema di esistenza globale (caso di rhs globalmente limitato). Teorema di alternativa (esistenza globale, blow up, break down).	116
Lezione 110. Teorema dell'asintoto. Primi esempi di studio qualitativo per equazioni differenziali autonome.	121
Lezione 111. Soprasoluzioni e sottosoluzioni e relativo teorema di confronto. Teorema di esistenza globale (caso di rhs con crescita sublineare).	127
Lezione 112. Ulteriori esempi di studio qualitativo di equazioni autonome.	132
Lezione 113. Primi esempi di studio qualitativo di equazioni non autonome.	137
Lezione 114. Teorema di confronto tra soprasoluzioni e sottosoluzioni deboli (nel caso Lipschitz). Parte di unicità del teorema CLPL: dimostrazione mediante soprasoluzioni.	142
Lezione 115. Primo esempio di studio qualitativo di un'equazione differenziale non autonoma con valori soglia.	147
Lezione 116. Ulteriore esempio di studio qualitativo con valori soglia.	151
Lezione 117. Esercizi sullo studio qualitativo di equazioni differenziali.	156

Lezione 118. Dipendenza continua dal dato iniziale: passaggio al limite nel caso con rhs continuo e stima della differenza nel caso con rhs lipschitziano. Condizioni di tipo Osgood per esistenza globale e unicità.	160
Lezione 119. Equazioni di ordine 2: spazio delle fasi, introduzione al metodo energetico, primi esempi.	165
Lezione 120. Equazioni di ordine 2: blow up vs esistenza di soluzioni periodiche, calcolo del periodo e sua dipendenza dal livello energetico, esempio del pendolo non linearizzato.	170
Lezione 121. Sistemi di equazioni differenziali lineari autonome a coefficienti costanti: teoria generale. Esponenziale di una matrice: definizione, calcolo, proprietà vere e false.	174
Lezione 122. Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee: studio della stabilità e stabilità asintotica nel caso 2×2 (via forma canonica della matrice).	179
Lezione 123. Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee: studio dell'asintotica stabilità con metodi energetici. Introduzione al teorema di linearizzazione.	183
Lezione 124. Teorema di linearizzazione: enunciato più formale e dimostrazione energetica nel caso di linearizzato diagonalizzabile con autovalori reali negativi. Esempi di applicazione.	187
Lezione 125. Equazione logistica. Esempi di sistemi di equazioni differenziali: modello preda-predatore (Volterra-Lotka) con o senza autolimitazione.	192
Lezione 126. Esempi di sistemi di equazioni differenziali: modello per due specie in competizione, epidemia SIS, epidemia SIR.	197
Lezione 127. Esempi di studio di equazioni differenziali del secondo ordine non lineari. Buca di potenziale.	201
Lezione 128. Esempio di convergenza dominata per integrali impropri. Calcolo dell'integrale di Dirichlet.	206
Lezione 129. Derivazione sotto il segno di integrale per integrali impropri. Applicazione all'integrale di Dirichlet ed alla Gamma di Eulero. Calcolo degli integrali di Fresnel mediante forme differenziali.	211
Lezione 130. Fine del calcolo degli integrali di Fresnel. Wronskiano e teorema di oscillazione per equazioni lineari di ordine due. Omeomorfismo tra linee di livello ed esistenza di livelli critici.	217

ANALISI 2 - LEZIONE 087

Titolo nota

11/03/2016

SUCCESIONI DI FUNZIONI

Setting: sia S un insieme, e siano $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. (Convergenza puntuale e convergenza uniforme)

Siano $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $f_\infty: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che

- $f_n \rightarrow f_\infty$ **PUNTALMENTE** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in S \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon$$

- $f_n \rightarrow f_\infty$ **UNIFORMEMENTE** se

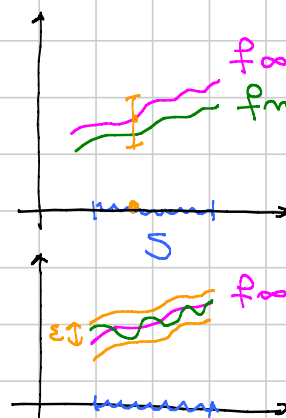
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon$$

Oss. La convergenza puntuale vuol dire: per ogni $x \in S$ fissato considero $\{f_n(x)\}$: questa è una succ. di numeri a cui chiedo di convergere a $f_\infty(x)$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in S$$

Nella convergenza uniforme avviene la stessa cosa, ma n_0 dipende solo da ε e non anche da x .

Graficamente questo vuol dire che il grafico di f_n sta in una striscia ampia ε intorno al grafico di f_∞ per $n \geq n_0$



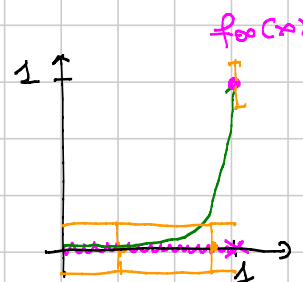
Ovietà: conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale
MA non vale il viceversa

Esempio (L'ESEMPIO) $S = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$

Studiamo la conv. puntuale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La convergenza NON è uniforme in $[0, 1]$
perché $f_n(x)$ non casca in un "intorno"
di ampiezza $\varepsilon = \frac{1}{10}$ intorno ad
 $f_\infty(x)$.



Oss. $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente
su $[0, \frac{9}{10}]$

Più in generale: $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$
unif. su $[0, A]$ per ogni $A < 1$,
ma

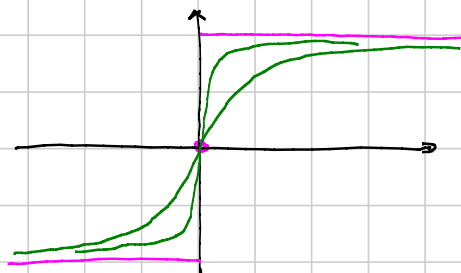
$f_n(x)$ NON conv. unif. a $f_\infty(x)$ in $[0, 1)$



Esempio 2 $f_n(x) = \arctan(nx)$ $S = \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Il limite non è unif. in $\mathbb{R}$, ma
è unif. ad esempio in $[A, +\infty)$
oppure $(-\infty, -A]$ per ogni $A > 0$
Non è unif. in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

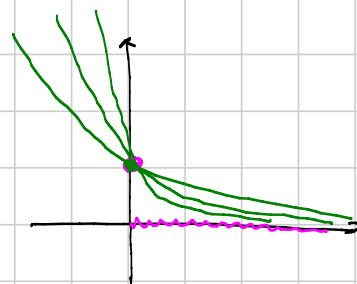


Esempio 3 $f_n(x) = e^{-nx}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{conv. puntuale per } x \geq 0$$

Non c'è conv. unif. in $[0, +\infty)$ e nemmeno in $(0, +\infty)$.

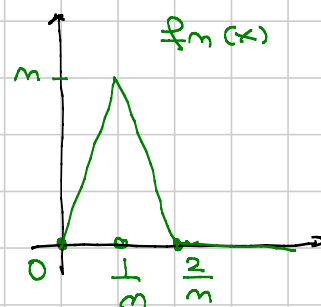
Invece c'è conv. unif. in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$.



Esempio 4 È evidente che il limite puntuale di funzioni continue può non essere continuo.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

↑
se $x > 0$ è sempre $f_n(x) = 0$
se $x = 0$ è $f_n(x) = 0$ definitivamente.



La conv. è unif. in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$, ma non è unif. in $[0, +\infty)$ e nemmeno in $(0, +\infty)$.

Nota bene

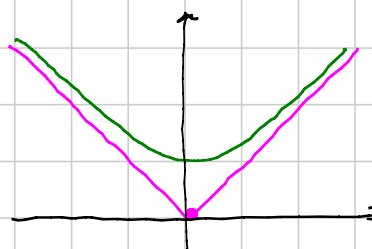
$$\int_0^{10} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{10} f_\infty(x) dx = 0$$

Non è vero che l'integrale del limite è il limite degli integrali se c'è conv. puntuale.

Esempio 5 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = |x|$$



C'è conv. puntuale su tutto $\mathbb{R}$ e c'è pure conv. unif.
 Per dim. formalmente si fa la differenza

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_0(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$x=0 \rightarrow$

Dato ε , la diff. diventa $\leq \varepsilon$ da un certo n_0 in poi
INDIPENDENTE da x , quindi c'è conv. unif.

Brutta notizia 3: il limite unif. di funzioni C^1 può
 non essere C^1 .

Il giorno in cui avrò $f_n: S \rightarrow Y$, allora

- posso definire la conv. puntuale se in anticipo ho una
 nozione di convergenza in Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f_n(x)}_{\text{el. di } Y} \quad \forall x \in S$$

- posso definire la conv. unif. se in Y c'è una metrica d:
 dico che

$$f_n \rightarrow f_0 \quad \text{unif}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad \forall n \geq n_0 \quad d(f_n(x), f_0(x)) \leq \varepsilon$$

Ancora meglio, posso definire

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ d(f(x), g(x)) : x \in S \}$$

(ampiezza di una striscia attorno ad f che contiene g)

e allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } S \Leftrightarrow \text{dist}(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$$

Oss. dist vorrebbe essere una distanza nell'insieme delle funzioni $f: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Le proprietà $(d_1), \dots, (d_4)$ sono verificate, MA non è detto che sia ben definita (il sup potrebbe essere $+\infty$).

ANALISI 2

-

LEZIONE 088

Titolo nota

15/03/2016

TEOREMI DI SCAMBIO PER SUCC. DI FUNZIONI

- ① LIMITE f_n continue, $f_n \rightarrow_b f_\infty \Rightarrow f_\infty$ continua
- ② INTEGRALE $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$
- ③ DERIVATA $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow f_n' \rightarrow f_\infty'$

S insieme, $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\infty: S \rightarrow \mathbb{R}$

Cow. puntuale: $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente (POINTWISE) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall s \in S \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad |f_n(s) - f_\infty(s)| \leq \varepsilon$$

Cow. unif.: $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente (UNIFORMLY) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall s \in S \quad \forall n \geq m_0 \quad |f_n(s) - f_\infty(s)| \leq \varepsilon.$$

② INFORMALE

$$\left| \int_a^b f_\infty(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f_\infty(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_{\text{per } n \text{ abbastanza grande questo } \leq \varepsilon \text{ per ogni } x \in [a,b]} dx$$

$$\leq \varepsilon (b-a)$$

- ③ INFORMALE: $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt$ se posso scambiare il limite con l'integrale
- $$f_\infty(a) + \int_a^x f_\infty'(t) dt$$

TEOREMA (Teorema di scambio dell'integrale)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni integrabili secondo Riemann (integrale proprio).

Sia $f_\infty : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. su } [a,b]$$

Allora

(1) f_∞ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$

(2) vale lo scambio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_\infty(x) dx.$$

Dim. (1) Per dimostrare che $f_\infty(x)$ è integrabile devo trovare due step function $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che

$$\psi(x) \leq f_\infty(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\text{e} \quad \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \quad \text{piccolo a piacere}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Scegliamo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n \geq m_0$$

Preso m_0 , sappiamo che $f_m(x)$ è integrabile, quindi esistono $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ t.c.

$$\psi_1(x) \leq f_{m_0}(x) \leq \varphi_1(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\text{e} \quad \int_a^b (\varphi_1(x) - \psi_1(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Dico che $\varphi(x) := \varphi_1(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\psi(x) := \psi_1(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

vanno bene per $f_\infty(x)$. Infatti

$$\psi(x) \leq f_\infty(x) \leq \varphi(x)$$

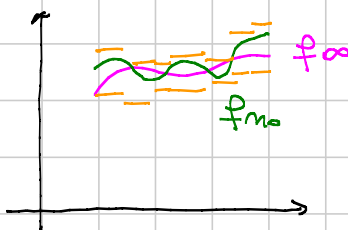
Vera perché
$$f_\infty(x) \leq f_{m_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq \varphi_1(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \varphi(x)$$

e idem dal basso.

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx &= \int_a^b (\varphi_1(x) - \psi_1(x)) dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Informalmente



Prendo la step. funct. che vanno bene per $f_{m_0}(x)$ e la alzo e abbasso di $\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

(2) Segue come nella dimostrazione informale. Detto meglio: dato $\varepsilon > 0$ scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_m(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall m \geq m_0$$

e ottengo che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_m(x) dx - \int_a^b f_\infty(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_m(x) - f_\infty(x)| dx \leq \varepsilon \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

Oss. La tesi meno ovvia è che $f_\infty(x)$ è integrabile secondo Riemann.

Oss. Se $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente e $f_n(x)$ è integrabile secondo Riemann per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora può succedere che $f_\infty(x)$ non sia nemmeno integrabile secondo Riemann.

Esempio classico: prendo

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Numero $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ e definisco

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\uparrow$
 x è uno dei primi n razionali

È evidente che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ punt. su $\mathbb{R}$ e $f_\infty(x)$ non è integr. sec. Riemann

— 0 — 0 —

TEOREMA (Teorema di scambio della derivata)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni di classe C^1 .

Supponiamo che

(i) esiste una funzione $g_\infty : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_n' \rightarrow g_\infty \quad \text{unif. in } [a,b]$$

conv. unif. delle derivate

(ii) esiste $x_0 \in [a,b]$ ed esiste $a_\infty \in \mathbb{R}$ tale che

$$f_n(x_0) \rightarrow a_\infty$$

conv. puntuale in un solo punto dell'intervallo

Allora, posto

$$f_{\infty}(x) := a_{\infty} + \int_{x_0}^x g_{\infty}(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

si ha che

- (1) f_{∞} è di classe C^1
- (2) $f'_{\infty}(x) = g_{\infty}(x)$ per ogni $x \in [a, b]$
- (3) $f_n(x) \rightarrow f_{\infty}(x)$ unif. in $[a, b]$.

Dim. Dal teorema di scambio di limite / continuità (che faremo dopo) segue che g_{∞} è continua in $[a, b]$.
A questo punto segue che $f_{\infty}(x)$ è C^1 per costruzione.
Resta da dim. ③.

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f'_n(x) - g_{\infty}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \geq n_0$$

$$|f_n(x_0) - a_{\infty}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Osservo che } f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

e faccio la differenza

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{\infty}(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - a_{\infty} - \int_{x_0}^x g_{\infty}(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - a_{\infty}| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g_{\infty}(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &\quad \text{per } n \geq n_0 \quad \leq (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon.$$

Oss. Nelle ipotesi basta

→ convergenza uniforme delle derivate in $[a, b]$

→ convergenza puntuale anche in un solo pto di $[a, b]$

Cosa si salva in dim. maggiore?

→ il teorema di scambio dell'integrale vale allo stesso modo per

$$f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$$

$\uparrow$
misurabile

→ il teorema di scambio della derivata vale con le derivate parziali. Ad esempio

$$f_n: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} \rightarrow g_\infty \quad \text{unif. in } [0, 1] \times [0, 1]$$

$$f_n(x_0, y) \rightarrow a_\infty(x_0, y) \quad \forall y \in [0, 1]$$

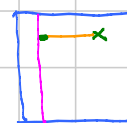
$\uparrow$ puntuale

$\leftarrow$ puntuale di f_n in un segmento verticale

$$\Rightarrow f_\infty(x, y) = a_\infty(x_0, y) + \int_{x_0}^x g_\infty(t, y) dt$$

è il limite uniforme di $f_n(x, y)$

— o — o —



ANALISI 2

-

LEZIONE 089

Titolo nota

15/03/2016

TEOREMA DI SCAMBIO DEI LIMITI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, sia $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, e sia $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{unif. in } A$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ (ma vale anche in $\bar{\mathbb{R}}$) un pto di accumulazione di A .
Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$$

Allora

- (1) la successione l_n ha un limite l_∞
- (2) vale lo scambio

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty \quad \text{(il limite della funzione limite è il limite dei limiti)}$$

Dim. Per dimostrare che $\{l_n\}$ ha limite basta far vedere che è di Cauchy.

Fisso $\varepsilon > 0$ e selgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A, \forall n \geq n_0.$$

Presi comunque $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$ si ha che

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_m(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ otteniamo

$$|l_n - l_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

che mostra che $\{l_n\}$ è di Cauchy.

Devo dimostrare che $f_\infty(x) \rightarrow l_\infty$ per $x \rightarrow x_0$.

Informale: $|f_\infty(x) - l_\infty| \leq$

$$\begin{aligned} &\leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l_\infty| \leq \varepsilon \\ &\quad \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad \text{per } n \text{ grande} \quad \text{per } x \text{ vicino} \quad \text{per } n \text{ grande} \\ &\quad \text{ad } x_0 \end{aligned}$$

Per rendere il discorso formale bisogna precisare l'ORDINE delle scelte.

- ① Fisso $\varepsilon > 0$
- ② Scelgo un indice n tale che

$$\begin{aligned} |f_\infty(x) - f_n(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in A \\ |l_n - l_\infty| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{successivamente,} \\ \text{definitivamente,} \\ \text{quindi ho } \infty \\ \text{indici } n \text{ a} \\ \text{disposizione} \end{array} \right\}$$

- ③ Dopo aver scelto n fisso $\delta > 0$ (che dipende da n ma non importa) tale che

$$|f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in [A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \setminus \{x_0\}$$

Il conto scritto sopra mi dice che

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [A \cap (\dots)] \setminus \{x_0\}$$

che è quello che volevo.

Corollario Se $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue e $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A , allora f_∞ è continua

Dim. La continuità di $f_n(x)$ in un certo x_0 ci dice che

$$\begin{array}{ccc} f_n(x_0) & = & \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \\ \downarrow & & \downarrow \text{(Teo. di scambio)} \\ f_\infty(x_0) & = & \lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) \end{array}$$

— o — o —

Altro modo di scrivere l'enunciato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

— o — o —

Oss. Il teorema di scambio vale anche per i limiti a $\pm \infty$ con dim. analoga.

— o — o —

Teorema di scambio in contesto metrico

Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici. Sia $x_0 \in X$ un pto di accumulazione per X .

Sia $f_n : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ una succ. di funzioni e sia $f_\infty : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ tale che

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \text{ unif. in } X \setminus \{x_0\}$$

Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$y \ni l_n := \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Supponiamo inoltre che Y sia COMPLETO

Allora

(1) $\{l_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{Y}$, quindi $l_n \rightarrow l_\infty$

(2) vale $\lim_{x \rightarrow x_\infty} f_\infty(x) = l_\infty$.

Dim. Esattamente la stessa. Nel punto (1) serve la completezza di $\mathbb{Y}$. Nel punto (2) le triangolari si fanno con ϵ .

Esercizio Dato $f_n \rightarrow f_\infty$
 $x_n \rightarrow x_\infty$

quando posso dedurre che

$$f_n(x_n) \rightarrow f_\infty(x_\infty).$$

Risposta: servono due ipotesi

- convergenza uniforme
- continuità del limite.

Brutal mode:

$$\begin{aligned} |f_\infty(x_\infty) - f_n(x_n)| &\leq |f_\infty(x_\infty) - f_\infty(x_n)| + |f_\infty(x_n) - f_n(x_n)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \text{ per } \text{continuità di } f_\infty \quad \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ per } \text{conv. unif.} \end{aligned}$$

ORDINE delle scelte

- ① Mi viene dato $\epsilon > 0$
- ② Scelgo $\delta > 0$ t.c. $|f_\infty(x) - f_\infty(x_\infty)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $x \in (x_\infty - \delta, x_\infty + \delta) \cap \dots$
- ③ Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \dots \forall n \geq n_0$

$$|x_n - x_\infty| \leq \delta$$

e allora concludo.

Ulteriore esercizio Mostrare che la puntuale non basta e la continuità del limite serve.
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Spazi di funzioni Sia (Y, d) metrico, e sia S un insieme non vuoto.

Def. Una funzione $f: S \rightarrow Y$ si dice limitata se

$$\exists y_0 \in Y \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad d(f(x), y_0) \leq M \quad \forall x \in S$$

Poniamo $F_b := \{ \text{funzioni } f: S \rightarrow Y \text{ limitate} \}$

Date due funzioni limitate $f: S \rightarrow Y$ e $g: S \rightarrow Y$ posso definire

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ d(f(x), g(x)) : x \in S \} \in \mathbb{R}$$

È reale perché

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), y_f) + d(y_f, y_g) + d(y_g, g(x))$$

Si verifica facilmente che $(F_b(S, Y), \text{dist})$ è uno spazio metrico.

L'unica non completamente ovvia è la triangolare

$$\begin{aligned} d(f(x), r(x)) &\leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), r(x)) \\ &\leq \text{dist}(f, g) + \text{dist}(g, r) \quad \forall x \in S \end{aligned}$$

Ora faccio il sup al LHS e ottengo $\text{dist}(f, r)$

Fatti generali ① Se f_n e f_0 stanno in $F_b(S, Y)$, allora

$$f_n \rightarrow f_0 \text{ uniformemente}$$

se e solo se $\text{dist}(f_n, f_0) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

② $(F_b(S, Y), \text{dist})$ è completo $\Leftrightarrow (Y, d)$ è completo

(Esercizio: data $\{f_n\}$ di Cauchy in F_b , ho che $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in (Y) per ogni $x \in S$, quindi $\rightarrow$, poi bisogna mostrare che la conv. è unif.)

③ Se X è metrico compatto, allora $C^0(X, Y)$ sono tutte funzioni limitate, e questo è a sua volta completo rispetto a dist.

(perché il limite unif. di funzioni cont. è cont.)

— o — o —

ANALISI

2

-

LEZIONE 090

Titolo nota

16/03/2016

CONV. PUNTUALE $\Rightarrow$ CONV. UNIFORME (SOTTO HP. DI MONOTONIA)

TEOREMA (Monotonia in n ad x fisso) (DINI'S THEOREM)

Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, sia $f_\infty: X \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in X \quad (\text{conv. puntuale})$$

Supponiamo che

(i) (X, d) sia compatto

(ii) f_∞ è continua

(iii) f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iv) per ogni $x \in X$ la succ. $n \rightarrow f_n(x)$ è debolm. monotona
(anche $\nearrow$ o $\searrow$ a seconda di x)

Allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } X.$$

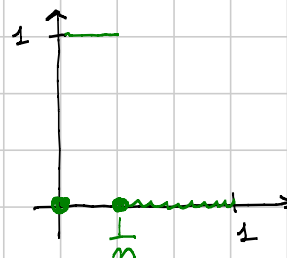
Esempi per mostrare che le Hp sono necessarie

Hp (i) serve: $X := [0, 1)$ $f_n(x) := x^n$

Hp (ii) serve: $X := [0, 1]$ $f_n(x) := x^n$

Hp (iii) serve: $X := [0, 1]$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Oss. Di solito nelle applicazioni serve la conv. unif. per dim. la continuità di $f_\infty(x)$. Qui invece viene assunta.

Dim. Andiamo in ordine

① Ci è dato $\varepsilon > 0$. Vogliamo trovare $\bar{m}_0$ t.c....

② Per ogni $x \in X$ esiste $m_x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_m(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \geq m_x$$

(Segue dalla conv. puntuale)

③ Avuto m_x dal passo precedente, fisso $r_x > 0$ t.c.

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_{r_x}(x) \quad (\text{cont. } f_\infty)$$

$$|f_{m_x}(y) - f_{m_x}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_{r_x}(x) \quad (\text{cont. } f_{m_x})$$

Claim: $|f_\infty(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_{r_x}(x) \quad \forall m \geq m_x$

Supponiamo $f_m(y) \nearrow$

$$\begin{aligned} |f_\infty(y) - f_m(y)| &= f_\infty(y) - f_m(y) \leq f_\infty(y) - f_{m_x}(y) = \\ &= \underbrace{f_\infty(y) - f_\infty(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{f_\infty(x) - f_{m_x}(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{f_{m_x}(x) - f_{m_x}(y)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Se invece $f_m(y) \searrow$: $|f_\infty(y) - f_m(y)| = f_m(y) - f_\infty(y)$

$$\leq f_{m_x}(y) - f_\infty(y) \text{ e come prima}$$

④ Considero $B_{r_x}(x)$ al variare di x : sono un ricoprimento aperto di X che è compatto, quindi esiste s.ric. finito

$$X = B_{r_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_k}(x_k)$$

Prendo $\bar{m}_0 := \max \{m_{x_1}, \dots, m_{x_k}\}$ e ho da lei pochi
 ogni $y \in X$ casa in qualche

$B_{\bar{m}_0}(x_i)$.
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Oss. Molte dim. in letteratura assumono monotonia nello
 stesso verso per ogni $x \in X$, ma NON SERVE.

$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

TEOREMA (Monotonia in x ad n fisso)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una
 succ. di funz., sia $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{conv. puntuale})$$

Supponiamo che

- (i) $[a, b]$ compatto (serve che ci siano gli estremi e sia limit.)
- (ii) f_∞ continua in $[a, b]$,
- (iii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $x \rightarrow f_n(x)$ è debolm. monot.
 (anche da parti diverse al variare di $n \in \mathbb{N}$)

Allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } [a, b].$$

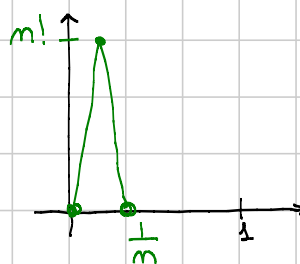
Oss. Le ipotesi servono

Senza (i) : $[a, b] = [0, 1)$ $f_n(x) := x^n$

Senza (ii) : $[a, b] = [0, 1]$ $f_n(x) := x^n$

Senza (iii) : $[a, b] = [0, 1]$

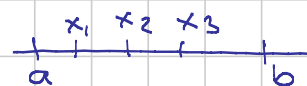
Manca monotonia ad n fisso
 e ad x fisso.



Dim. Andiamo in ordine.

- ① Ci è dato $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{m}_0 \in \mathbb{N}$ t.c....
- ② Prendiamo $\delta > 0$ che nell'unif. continuità di f_∞ corrisponde ad $\varepsilon/2$. (cont. di f_∞ su $[a, b]$ compatto)
- ③ Scegliamo punti (int. dim.)

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$



tali che $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

- ④ Scegliamo $\bar{m}_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_\infty(x_i) - f_m(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } i = 0, \dots, k \quad \forall m \geq \bar{m}_0$$

(uso cont. puntuale)

Claim $|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall m \geq \bar{m}_0$

Supponiamo $f_m(x) \nearrow$ (in x) e supponiamo



$$f_\infty(x) - f_m(x) \leq f_\infty(x) - f_m(x_{i-1})$$

$$= \underbrace{f_\infty(x) - f_\infty(x_{i-1})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_\infty(x_{i-1}) - f_m(x_{i-1})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

$$f_\infty(x) - f_m(x) \geq f_\infty(x) - f_m(x_i)$$

$$= \underbrace{f_\infty(x) - f_\infty(x_i)}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_\infty(x_i) - f_m(x_i)}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} \geq -\varepsilon$$

Questo mostra che $|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq \bar{m}_0$

Nel caso in cui $f_m(x) \nearrow$ basta invertire gli estremi per ottenere le stesse disuguaglianze.

— o — o —

Oss. La monotonia può avere versi diversi a seconda di n .

È ancora vero però che f_∞ sarà debolmente monotona. I tipi di monot. sono solo due, quindi ci sarà una sottosucc. $f_{m_k}(x)$ con una direzione fissa, wlog $\nearrow$. Allora

$$f_{m_k}(y) \geq f_{m_k}(x) \quad \text{per ogni } y > x \text{ in } [a, b]$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$f_\infty(y) \geq f_\infty(x)$$

Limite puntuale di funzioni monotone (anche a caso) è monotono.

(Se sono una s.succ. $\nearrow$ e una s.succ. $\searrow$ vuol dire che il limite è costante).

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 091

Titolo nota

16/03/2016

CONVERGENZA UNIFORME SUI COMPATTI

Def. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, e sia $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che

$$f_n \rightarrow f_0 \text{ unif. sui compatti}$$

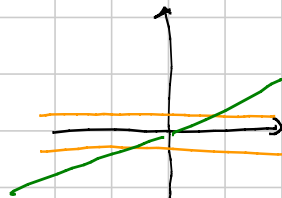
$$\text{se } f_n \rightarrow f_0 \text{ unif. in } [-A, A] \text{ per ogni } A > 0.$$

Achtung!

$$\forall A \quad f_n \rightarrow f_0 \text{ unif. in } [-A, A] \not\Rightarrow f_n \rightarrow f_0 \text{ unif. in } \mathbb{R}$$

Esempio $f_n(x) = \frac{x}{n}$. È ovvio che $f_n(x) \rightarrow 0$ puntualm.

e conv. unif. sui compatti, ma non unif. in $\mathbb{R}$



Oss. Se $f_n \rightarrow f$ unif. sui compatti
e f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$,
posso dedurre che f è continua su tutto $\mathbb{R}$?

Sì, perché la cont. è un fatto LOCALE: se f è cont. in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$, allora lo è su tutto $\mathbb{R}$.

Oss. ① $f_n \rightarrow f_0$ unif. in A e $B \subseteq A \Rightarrow f_n \rightarrow f_0$ unif. in B

↑
ok

② $f_n \rightarrow f_0$ unif. in A
 $f_n \rightarrow f_0$ unif. in $B \Rightarrow f_n \rightarrow f_0$ unif. in $A \cup B$

↑
ok, purché siano solo 2
o un numero finito

Oss. Se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$, allora
 $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in K per ogni $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto
 $K \subseteq [-A, A]$ per qualche A .

Oss. La defniz. di conv. unif. sui cpt. vale in generale in un metico (X, d) .

$f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in K per ogni $K \subseteq X$ compatto

Valgono le stesse proprietà di sopra.

Esercizio $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Supponiamo che

(i) $f_n' \rightarrow g_\infty$ unif. su $\mathbb{R}$ (controlla le derivate)

(ii) $f_n(0) \rightarrow \tau$ (controlla le funzioni)

Cosa posso dedurre? Posso dedurre che esiste $f_\infty: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $\mathbb{R}$

NO! $f_n(x) = \frac{1}{n}x + \tau$ $f_n'(x) \rightarrow 0$ unif. in $\mathbb{R}$
 $f_n(0) \rightarrow \tau$

ma $f_n(x)$ non conv. unif. in $\mathbb{R}$ a $f_\infty(x) \equiv \tau$.

Posso solo dedurre, dal teo. scambio derivata, che

$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. sui compatti

dove $f_\infty(x) := \tau + \int_0^x g_\infty(t) dt$, quindi $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$

Esercizio Sia $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dei polinomi di grado ≤ 3 .
Supponiamo che esista $f_\infty: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$p_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \text{puntuale.}$$

Allora $f_\infty(x)$ è un polinomio di grado ≤ 3 e la convergenza è unif. sui compatti.

Anzi di più: posso indebolire l'ipotesi richiedendo

$$p_n(x) \rightarrow p_\infty(x) \quad \text{solo per 4 valori di } x.$$

Dim 1: buona I 4 valori siano x_0, x_1, x_2, x_3 . I polinomi siano

$$p_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3$$

Vorrei tanto che i coeff. avessero limite.

I coeff. dipendono dai valori $(p_n(x_0), p_n(x_1), p_n(x_2), p_n(x_3))$ mediante l'inversa di una matrice di Vandermonde

$$W \cdot \text{coeff} = \text{vettore} \rightsquigarrow \text{coeff}_n = W^{-1} \cdot \text{vettore}_n$$

Se $\text{vettore}_n \rightarrow \text{vettore}_\infty$, allora $\text{coeff}_n \rightarrow \text{coeff}_\infty$

Dalla convergenza dei coeff. segue la conv. unif. sui cpt:

$$|p_\infty(x) - p_n(x)| \leq \underbrace{|b_\infty - b_n|}_{\downarrow 0} \cdot |x| + \underbrace{|c_\infty - c_n|}_{\downarrow 0} \cdot |x|^2 + \underbrace{|d_\infty - d_n|}_{\downarrow 0} \cdot |x|^3 \leq A \leq A^2 \leq A^3$$

Riassunto:

conv. su 4 p.ti $\Rightarrow$ conv. dei coeff. $\Rightarrow$ conv. unif. sui cpt

DM2 (Astratta) Voglio dim. che convergono i coeff.

Sia $R_{\leq 3}[x]$ lo sp. vett. dei polinomi di grado ≤ 3 su $\mathbb{R}$.
Dato

$$p \in R_{\leq 3}[x] \quad p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

definisco

$$\|p\|_1 := \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\}$$

Si dimostra facilmente che $\|p\|_1$ è una norma in $R_{\leq 3}[x]$.

Dato un intervallo $[-A, A]$ definisco

$$\|p\|_2 := \max \{|p(x)| : x \in [-A, A]\}$$

Anche questa è una norma su $R_{\leq 3}[x]$.

Dati 4 p.ti (x_0, x_1, x_2, x_3) definisco

$$\|p\|_3 := \max \{|p(x_0)|, |p(x_1)|, |p(x_2)|, |p(x_3)|\}$$

Sorpresona: anche questa è una norma. L'unica cosa non ovvia è che $\|p\|_3 = 0 \Rightarrow p(x) \equiv 0$, ma questo segue dal fatto che i pol. sono determinati dai valori in 4 p.ti ^{di grado ≤ 3}

Ma in uno spazio di dim. finita tutte le norme sono equivalenti, quindi

conv. in 4 p.ti $\Rightarrow$ conv. in $\|\cdot\|_3 \Rightarrow$ conv. in $\|\cdot\|_2$
 $\Rightarrow$ conv. unif. in $[-A, A]$

Spazi di funzioni

- $C^0([a,b], \mathbb{R})$ è metrico completo rispetto a

$$\text{dist}(f, g) := \max \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a,b] \}$$

e la metrica induce la conv. unif.
È anche uno sp. di Banach

↑
distanza che deriva
da una norma

- $\text{Bounded}([a,b], \mathbb{R})$ è metrico completo rispetto a dist
(def. con il sup)
funzioni limitate

- Stessa cosa se hai due pti prec. c'è un metrico completo in arrivo

- $C^0((a,b), \mathbb{R})$ non è metrico rispetto a dist, perché dist può non essere definita

- $\text{Bounded}((a,b), \mathbb{R})$ è metrico completo risp. a dist.

- $C^1([a,b], \mathbb{R})$ è metrico rispetto a dist, ma non è completo, perché il limite unif. di C^1 non è detto che sia C^1

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad [a,b] = [-1, 1] \quad (\text{Un sottoinsieme di un completo è completo} \Leftrightarrow \text{è chiuso})$$

- $C^1([a,b], \mathbb{R})$ è metrico completo rispetto alla

$$\text{dist}_1(f, g) := \max \{ |f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| : x \in [a,b] \}$$

Convergere in dist_1 vuol dire $f_n \rightarrow f_\infty$ e $f_n' \rightarrow g_\infty (= f_\infty')$.

ANALISI 2

-

LEZIONE 092

Titolo nota

18/03/2016

SERIE DI FUNZIONI

Setting: S insieme, $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad (\text{somma di infinite funzioni})$$

Possiamo definire le somme parziali

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Diciamo che la serie conv. punt. / unif. a seconda che $S_n(x)$ conv. punt. / unif. ad una certa $S_{\infty}(x)$ che si dice somma delle serie.

Operativamente: $\rightarrow$ conv. punt. = studio di una serie parametrica
 $\rightarrow$ conv. unif. = spesso difficile da studiare se uno non conosce S_{∞} .

Def. Si dice che una serie converge TOTALMENTE (NORMAL CONVERGENCE) se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \} < +\infty$$

numeri reali ≥ 0 , quindi è una serie che può solo convergere o div. a $+\infty$

Vantaggio: valgono le implicazioni

conv. TOTALE $\Rightarrow$ conv. UNIF. $\Rightarrow$ conv. PUNTUALE

 ~~$\Leftarrow$~~ ~~$\Leftarrow$~~

Proposizione (Weierstrass M-test)

Sono fatti equivalenti

(i) la serie converge totalmente

(ii) esiste una successione M_n di numeri reali t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S$$

Dim. Ovvio

$\Rightarrow$ Prendo $M_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$

$\Leftarrow \sup \{ \dots \} \leq M_n$ e si chiude per confronto.

— o — o —

Dim. che TOTALE $\Rightarrow$ UNIFORME

Poniamo $M_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$.

Supponiamo che ci sia la totale. Fissiamo $x \in S$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

quindi il LHS converge, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ conv. assolutamente

quindi converge. Questo mostra che esiste il limite puntuale.

Ora dall'analisi 1 sappiamo che, detta $S_{\infty}(x)$ la somma, vale

$$\begin{aligned} |S_{\infty}(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \end{aligned}$$

Poichè la serie degli M_k converge: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

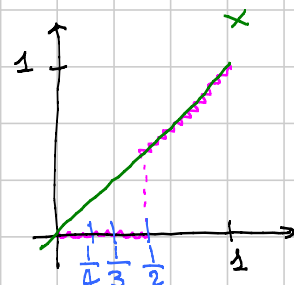
$\forall n \geq n_0$ il RHS $\leq \varepsilon$ per ogni $x \in S$. Questa è la conv. unif.

— o — o —

Oss. Può esserci conv. unif. SENZA conv. totale anche se tutte le $f_n(x)$ sono ≥ 0 .

L'idea è che si possono prendere i supporti di $f_n(x)$ disgiunti tra di loro

$$f_n(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Per costruzione $\sum f_n(x)$ converge a x e ci converge uniform. perché

$$x - S_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi $|x - S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Non c'è conv. totale perché $\sup \{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{n}$

e $\sum \frac{1}{n}$ non converge.

— 0 — 0 —

Prop. (Cond. nec. per la conv. uniforme di una serie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ conv. unif. in } S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{|f_n(x)| : x \in S\} = 0$$

Operativamente: se il sup non tende a 0, addio conv. unif.

Dim. Conv. unif. della serie $\Rightarrow S_n(x) \rightarrow S_\infty(x)$ unif.

$$\Rightarrow \underbrace{S_n(x) - S_{n-1}(x)}_{f_n(x)} \rightarrow 0 \text{ unif.} \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0 \text{ unif.}$$

$$\Rightarrow \sup \{|f_n(x)| : x \in S\} \rightarrow 0.$$

— 0 — 0 —

Caso utile : serie a segno alterno stile Leibnitz

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \quad x \in S$$

Supponiamo che

(i) $\varphi_n(x) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in S$

(ii) $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in S$.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \text{ conv. unif. in } S \Leftrightarrow \sup\{\varphi_n(x) : x \in S\} \rightarrow 0.$$

Dim. $\Rightarrow$ è la cond. nec. appena enunciata

$\Leftarrow$ la convergenza puntuale è il criterio di Leibnitz. Mi serve d' uniforme.

Dalla dim. di Leibnitz di analisi 1 (rivedere) segue che

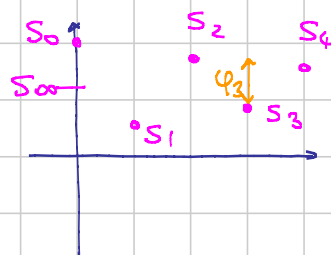
$$|S_{\infty}(x) - S_n(x)| \leq \varphi_n(x) \quad \forall x \in S$$

quindi

$$\sup_{x \in S} |S_{\infty}(x) - S_n(x)| \leq \sup_{x \in S} \varphi_n(x)$$

$\downarrow$
0, il che è equiv.

alla conv. unif.



— 0 — 0 —

Teorema Sia V uno sp. di Banach. Sia u_n una succ. in V .

Allora

serie di numeri

serie di vettori

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ conv.}$$

Dim. Poichè

$$S_m := v_0 + v_1 + \dots + v_m$$

$$\hat{S}_m := \|v_0\| + \|v_1\| + \dots + \|v_m\|$$

Osserviamo che per ogni $m > n$ vale la stima

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \|v_m + \dots + v_{m+1}\| \\ &\leq \|v_m\| + \dots + \|v_{m+1}\| = \overbrace{\hat{S}_m - \hat{S}_n}^{\geq 0} \end{aligned}$$

Ora $\sum \|v_m\| < +\infty \Rightarrow \{\hat{S}_m\}$ è di Cauchy

disug.
precedente

$\Rightarrow \{S_m\}$ è di Cauchy

$\Rightarrow S_n$ converge

$\Rightarrow \sum v_m$ converge

legame con quanto detto prima è chiaro

$V = \text{Bounded}(S, \mathbb{R})$ con la solita dist

Allora conv. unif. è equivalente alla convergenza in V rispetto a dist.

La convergenza totale è equivalente alla convergenza delle norme di $f_n(x)$, la norme che indicano dist

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in S\}$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 093

Titolo nota

18/03/2016

Domande su una serie di funzioni:

- dove conv. punt. / unif.
- regolarità del limite
- comportamento del limite agli estremi della zona di def.

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\arctan(nx)}{n^2}}_{f_n(x)} =: f(x)$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale la stima $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2} = M_n$

$\Rightarrow$ conv. tot. su tutto $\mathbb{R} \Rightarrow$ puntuale e unif su tutto $\mathbb{R}$

Il limite $f(x)$ è una funzione continua (le $S_n(x)$ sono cont. ed il limite è unif.)

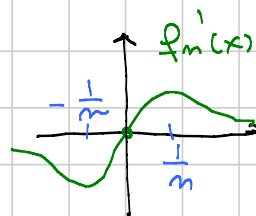
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{= \frac{\pi^2}{6}}$$

Teo. di scambio una volta che ho conv. unif.

su tutto $\mathbb{R}$ (basta su semiretta dx)

Se volessi sapere se $f(x)$ è C^1 dovrei considerare la serie di $f'_n(x)$ e sperare nella unif.

$$f'_n(x) = \frac{1}{n^2} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n} \frac{x}{1+n^2x^2}$$



Se voglio sperare nella totale devo fare il sup

$$\sup \{ |f'_n(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}$$

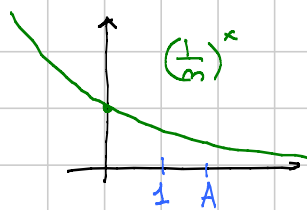
$$f_n''(x) = \frac{1}{n} \frac{(1 - n^2 x^2 - 2n^2 x^2)}{()^2} = \frac{1}{n} \frac{1 - n^2 x^2}{()^2} \quad x = \pm \frac{1}{n}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \text{ conv. totalmente su } \mathbb{R} \Rightarrow \text{conv. unif.}$$

Tes. scambio $\Rightarrow f \in C^1$ e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{f_n(x)} =: f(x)$



Analisi: $\Rightarrow$ convergenza puntuale solo per $x > 1$.

La convergenza è unif. in $(1, +\infty)$? Se sì, anzi la continuità e un aiuto nel fare il lim per $x \rightarrow 1^+$.

Vediamo la totale: $\sup \{ f_n(x) : x > 1 \} = \frac{1}{n}$ 😞

Niente totale $\Rightarrow$ BOH.

Fisso $A > 1$: allora $\sup \{ f_n(x) : x \geq A \} = \frac{1}{n^A}$

Per ogni $A > 1$ si ha che la serie conv. TOTALMENTE in $[A, +\infty)$ quindi conv. unif. in $[A, +\infty)$, quindi $f(x)$ è cont. in $[A, +\infty)$.

Questo basta per concludere la continuità in $(1, +\infty)$.

La conv. unif. sulle semirette dx basta per concludere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1.$$

$\uparrow$ tes. scambio $\uparrow$ colpa di $f_1(x)$ che tende a 1 (tutte le altre tendono a 0)

Non posso usare il teo. di scambio per $x \rightarrow 1^+$. A mano osso che

$$f(x) \geq S_n(x) \quad \forall x > 1 \quad \forall n \geq 1$$

↑
perché sono tutte ≥ 0

Faccio il liminf a dx e sx e ottengo

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow 1^+} f(x) &\geq \liminf_{x \rightarrow 1^+} S_n(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ora faccio il sup su $n \in \mathbb{N}$ e ottengo

$$\liminf_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \text{ quindi è pure limite}$$

(a posteriori lo scambio è giustificato)

Ora sappiamo anche che non c'è conv. unif. in $(1, +\infty)$.
Infatti

$$\sup \{ |f(x) - S_n(x)| : x > 1 \} = +\infty \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

↑ ↑
non limitata limitata

quindi non può tendere a 0 per $n \rightarrow \infty$

Fatto generale Una serie di funzioni limitate in un certo S non può conv. unif. in S ad una funzione non limitata in S .

— o — o —

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^n)}{n}$$

$x \geq 0$ (ma per $x < 0$ è
MOLTO interessante)

Per $x \geq 1$ manca cond. nec. di Analisi 1 $\Rightarrow$ addio.

Non c'è conv. totale in $[0, 1) \Rightarrow$ BOH

Fisso $A \in [0, 1)$ e osservo che

$$\sup \{f_n(x) \mid x \in [0, A]\} = \frac{1}{n} \arctan(A^n)$$

converge per C.A. con $\frac{A^n}{n}$

$\Rightarrow$ totale in $[0, A] \Rightarrow$ unif. in $[0, A] \Rightarrow$ limite continuo
in $[0, A]$
 $\Rightarrow$ limite cont. in $[0, 1)$

Per fare il limite per $x \rightarrow 1^-$ non posso usare thm. di scambio, ma come prima

$$f(x) \geq S_n(x) \quad \forall x \in [0, 1) \quad \forall n \geq 1, \text{ quindi}$$

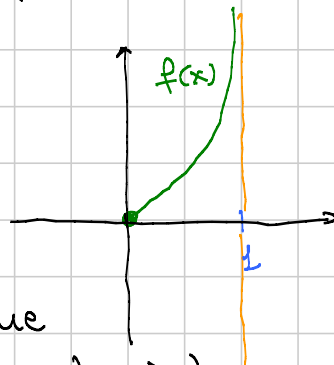
$$\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 1^-} S_n(x) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

e facendo il sup in $n \in \mathbb{N}$ ottengo $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

Per x negativi è equivalente a studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan x^n}{n} \quad \text{per } x \geq 0$$

$\underbrace{\quad}_n \quad \varphi_n(x)$



Per $x \in [0, 1]$ posso usare Leibnitz in versione serie di funzioni ($x \in [0, 1]$ serve per la monotonia)

Allora si ha conv. unif. se e solo se

$$\sup \left\{ \varphi_n(x) : x \in [0, 1] \right\} \rightarrow 0$$

$\frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{n}$

Quindi ok conv. unif. in $[0, 1]$, cioè in $[-1, 0]$ per quella originaria.

Per $x \geq 1$ aggiungo e tolgo $\frac{\pi}{2n}$:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{2n}}_{\text{serie di numeri che converge}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(x^n) - \frac{\pi}{2}}{n}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \arctan \left(\underbrace{\left(\frac{1}{x} \right)^n}_{y^n \text{ con } y \in [0, 1]} \right)$$

↑
formula archi associati

Quindi anche l'ultima serie conv. unif. in $[1, +\infty)$.

Conv. unif. in $[0, 1] + \text{conv. unif. in } [1, +\infty) \Rightarrow \text{conv. unif. in } [0, +\infty)$

l'unione è finita

Tornando a quella originaria abbiamo

- conv. puntuale in $(-\infty, 1)$
- conv. totale e quindi unif in $(-\infty, A]$ per ogni $A < 1$
con tutto quello che comporta
- niente unif. in $(-\infty, 1)$ perché $f(x)$ è non limitata
e le somme parziali invece lo sono.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 094

Titolo nota

05/04/2016

SERIE DI POTENZE

Def. Una serie di potenze è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

↑
coeff.

(Brutalmente: polinomio di grado ∞)

Domande: ① Per quali x converge, e come converge
② A cosa converge, cioè calc. la somma esplicitamente

Oss. Per $x=0$ la serie converge sempre, e la somma fa c_0

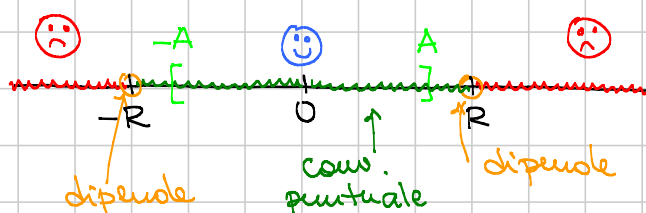
Teorema 1 (Raggio di convergenza) Esiste $R \in [0, +\infty]$ con questa proprietà ↑ incluso

(1) per ogni x con $|x| < R$ la serie converge, anzi converge assolutamente. Ancora meglio per ogni $A < R$ la serie converge totalmente, dunque unif., su $[-A, A]$.

(2) Per ogni x con $|x| > R$ la serie non converge, anzi non verifica nemmeno la cond. necessaria

(3) Per $x = \pm R$ dipende dai casi (indipend. su $\pm R$)

Oss. La situazione si può riassumere così



- Casi speciali
- ① Se $R = +\infty$, allora converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e conv. unif. sui compatti
 - ② Se $R = 0$, allora converge solo per $x = 0$.

Teorema 2 (Formula per il raggio di conv.)

Il raggio di conv. è dato dalla formula

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{con l'accordo che } \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0)$$

dove

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Teorema 3 (Teorema di Abel) Supponiamo $R \in (0, +\infty)$.

Supponiamo che una serie di potenze converga anche per $x = R$. Allora converge unif. in $[0, R]$, e quindi in particolare la somma è continua in tutto $[0, R]$.

Stessa cosa per l'estremo $-R$.

Teorema 4 (Regolarità della funzione limite)

Supponiamo $R \in (0, +\infty]$.

Allora la somma di una serie di potenze è una funzione di classe C^∞ in $(-R, R)$ e posso calcolare tutte le derivate per serie, quindi in particolare "è la serie di Taylor di se stessa".

Brutalmente: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad f(0) = c_0$

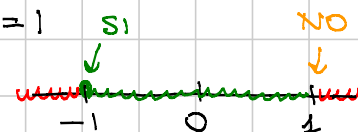
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad f'(0) = c_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad f''(0) = 2c_2$$

... per induzione $f^{(k)}(0) = k! c_k \quad \leadsto c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n}$

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad \leadsto \quad R = \frac{1}{L} = 1$$



Quindi abbiamo

→ conv. puntuale in $[-1, 1)$

→ conv. tot., quindi unif. in $[-A, A]$ per ogni $A \in (0, 1)$

→ Abel $\Rightarrow$ conv. unif. in $[-1, 0]$ (ma non totale)
e di conseguenza conv. unif. su tutti i compatti
 $K \subseteq [-1, 1)$

Ora la serie scritta è la serie di Taylor di

$$f(x) = -\log(1-x)$$

Grazie al teorema 4, sappiamo che la somma della serie è $f(x)$ per tutti gli x per cui conv. puntuale, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in [-1, 1)$$

Ponendo $x = -1$ ho trovato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = -\log 2$$

— 0 — 0 —

$$\text{Analogamente: } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Sembra il caso } x=1 \text{ di } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

che è la serie di Taylor di $\arctan x$, e quindi dove converge converge ad $\arctan x$. La zona di convergenza è $(-1, 1]$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Considero la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$
con l'idea di porre $x = \frac{1}{3}$.

→ Dove converge? $L=1 \leadsto R=1 \leadsto (-1, 1)$

(negli estremi manca la cond. necessaria)

$\leadsto x = \frac{1}{3}$ è ok.

→ Cerco di vedere la serie data come serie di Taylor di q.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

↑
teo. scambio

$$= x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\downarrow$$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$= x (1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-x}$$

↑
geometrica

Mettendo $x = \frac{1}{3}$ ottengo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Oss. ① Da ricordare

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$$

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

② Se voglio $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k$ conviene procedere allo stesso modo.

ANALISI 2 - LEZIONE 095

Titolo nota

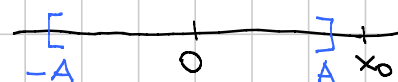
05/04/2016

Lemma 1 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie di potenze.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un valore per cui converge. Sia $a \in \mathbb{R}$ con $0 < a < |x_0|$.

Allora la serie converge totalmente in $[-a, a]$

Dim. Poiché in x_0 converge, allora in x_0 verifica la cond. necessaria, cioè $c_n x_0^n \rightarrow 0$ quindi è limitata



$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |c_n| \cdot |x_0|^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|c_n| \leq \frac{M}{|x_0|^n}$$

Mi metto in $[-A, A]$ e ho che

$$\sup_{x \in [-A, A]} |c_n x^n| \leq |c_n| \cdot A^n \leq M \frac{A^n}{|x_0|^n} = M \left(\frac{A}{|x_0|} \right)^n$$

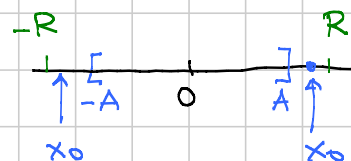
quindi la serie dei sup è maggiorata da una geom. con ragione < 1 , quindi converge.

— 0 — 0 —

Def. 1 Raggio

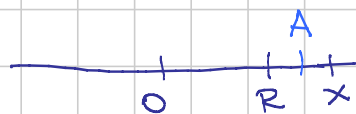
$$R := \sup \{ |x| : \text{la serie converge in } x \}$$

Dico che valgono ①, ② e ③ ^{gratuito}
La dim. di ① segue dal lemma prec. dopo aver trovato un x_0 per cui la serie converge con $A < |x_0| < R$



Resta da dim. che la serie non verifica nemmeno la cond. necessaria per $|x| > R$.

Se la verificasse, allora per la dim. del lemma avrei cond. in $[-A, A]$ con $R < A < |x|$, il che va contro la def. di sup.



— o — o —

Oss. Il lemma si può enunciare supponendo solo che la serie verifichi la cond. nec. in x_0 .

A quel p.to posso porre $R := \sup \{ |x| : \text{vale la cond. nec.} \}$

— o — o —

Dim. teorema 2 Sia $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Supponiamo $L \in (0, +\infty)$

Per il teorema precedente

(gli altri casi sono più semplici)

$R := \sup \{ x > 0 : \text{per } x \text{ vale la cond. nec.} \}$

↓

$x^n C_n \rightarrow 0$, cioè $|x|^n \cdot |a_n| \rightarrow 0$

Calcolo il limite con il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|x|^n \cdot |a_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se $|x| < \frac{1}{L}$, allora $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \limsup < 1$

quindi per il criterio della radice $|x|^n \cdot |a_n| \rightarrow 0$

Se $|x| > \frac{1}{L}$, allora sappiamo che esiste sottosuccessione

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L,$$

e quindi $\sqrt[n_k]{|x|^{n_k} |a_{n_k}|} = |x| \cdot \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow |x| \cdot L > 1$

il che è assurdo perché se $|x|^{n_k} |c_{n_k}| \rightarrow 0$, allora definitivamente sarebbe ≤ 1 .

— o — o —

Lemma di sommazione parziale (vedi Analisi 1)

Poniamo $A_n : a_0 + a_1 + \dots + a_n$ (primitiva di una succ.)

$$\sum_{k=m+1}^n a_k b_k = A_n b_{m+1} - A_m b_{m+1} - \sum_{k=m+1}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$$

per ogni $m > n$

Dim. teo. 3

Passo 1: semplificazioni

→ Posso supporre wlog di essere in $\mathbb{R}$ (e non in $-\mathbb{R}$): se sono in $x = -R$, cambio x con $-x$ e inglobo i segni nei coeff.

→ Posso supporre wlog che $R = 1$: se così non fosse, cambio x in Ry e gli R^n li butto nei coeff.

→ Posso supporre wlog che sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$: se così

non fosse, basta cambiare c_0 , cioè aggiungere o togliere una costante.

Passo 2 Chiarisco i coeff. a_n e non c_n . Quindi la serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ b_n}}{x^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \quad (\text{non posso supporre che } \sum |a_n| < +\infty)$$

Passo 3 Dato dimostrare la conv. unif. in $[0, 1]$.

Per farlo dimostro che la successione delle somme parziali $S_m(x)$ della serie di funzioni è di Cauchy rispetto alla norma del sup., cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall m > n \geq m_0 \quad |S_m(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^m a_k x^k = (\text{uso lemma di Abel})$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $a_k \quad b_k$

$$= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} - \sum_{k=n+1}^m A_k (x^{k+1} - x^k)$$

$$= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} + (1-x) \sum_{k=n+1}^m A_k x^k$$

Procedo in ordine

1 - mi è stato dato $\varepsilon > 0$

2 - scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|A_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq m_0$
 $\uparrow$
 posso perché $A_k \rightarrow 0$.

3 - Concludo

$$\begin{aligned}
 |S_m(x) - S_n(x)| &\leq |A_m| \cdot |x|^{m+1} + |A_n| \cdot |x|^{n+1} + (1-x) \sum_{k=n+1}^m |A_k| x^k \\
 &= |A_m| \cdot |x|^{m+1} + |A_n| \cdot |x|^{n+1} + (1-x) \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=n+1}^m x^k \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{x^{m+1}}{1-x}}$

Esercizio Mostrare che se $\sum a_k = +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_k x^k = +\infty$$

Dim. teo. 4 Basta dimostrare che una serie di potenze e la sua derivata termine a termine hanno lo stesso raggio di conv. (poi si usa il teorema di scambio della derivata)

$\sum m c_n x^{n-1}$ per calcolare il raggio di conv. faccio

$$\sqrt[n]{|m c_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{m}}_{\substack{\downarrow \\ \text{ha} \\ \text{limite } 1}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{|c_n|}}_{\substack{\downarrow \\ \text{ha limsup } L}} \quad \text{ha limsup } L$$

Oss. Il comportamento per $x = \pm R$ può solo peggiorare, cioè se si ha conv. per la serie delle derivate, allora si ha anche per la serie iniziale.

Supponiamo $x = R = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{m a_n}_{\substack{\downarrow \\ \text{ha somme parziali} \\ \text{limitate}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{m}}_{\substack{\text{converge per Dirichlet} \\ \text{tende a 0 decrescendo}}}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2 — LEZIONE 096

Titolo nota

06/04/2016

FUNZIONI ANALITICHE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora f si dice analitica in A se $f \in C^\infty(A)$ e per ogni $x_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$ e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

sviluppo di Taylor di
 $f(x)$ in centro in $x = x_0$

omega
↓

L'insieme delle funzioni analitiche in A si indica con $C^\omega(A)$

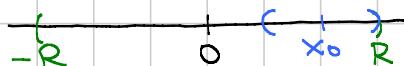
Oss. $f \in C^\infty \not\Rightarrow f \in C^\omega$ in generale. Esempio classico

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Si vede che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (vedi analisi 1), quindi in nessun intervallo $(-r, r)$ può essere $f(x) =$ somma serie di Taylor (questa viene).

Teorema 1 Le serie di potenze sono funzioni analitiche all'interno del raggio di conv. (in $(-R, R)$).

Non solo, quando
mi metto in x_0 , la
nuova serie di Taylor
ha raggio di convergenza
almeno $R - |x_0|$.



— o — o —

Criteri di analiticità

Come dimostro che una certa $f(x)$ è analitica

CRITERIO GENERALE

Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$,
 $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$.

Supponiamo che esista una costante M tale che

$$\sup \{ |f^{(k)}(x)| : x \in (x_0 - r, x_0 + r) \} \leq M \frac{k!}{r^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Allora f è analitica in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Dim. Dato per buono il teorema 1, ci basta dim. che la serie di Taylor di f con centro in $x = x_0$ converge nell'intervallo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Voglio dimostrare che la sua somma è $f(x)$.

Uso Taylor Lagrange

$$|f(x) - P_m(x)| = \frac{|f^{(m+1)}(\xi)|}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}$$

$\uparrow$ *somma parziale della serie* $\nwarrow$ *misterioso*

$$\leq \frac{1}{(m+1)!} M \frac{(m+1)!}{r^{m+1}} (x - x_0)^{m+1}$$

$$= M \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^{m+1}$$

$\downarrow$ 0 perché esponenziale con base $\in (-1, 1)$

— 0 — 0 —

Oss. Non ho in realtà usato il teorema 1

Corollario 1 Supponiamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Supponiamo che per ogni $A > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \quad \forall x \in [-A, A], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

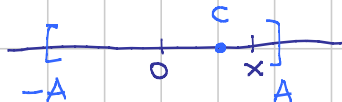
Allora f è analitica su tutto $\mathbb{R}$.

Dim. Stessa di prima

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \overbrace{|f^{(n+1)}(c)|}^{\leq M \text{ in } [-A, A]} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

$$\leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\downarrow$
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$



Conseguenza: le funzioni

e^x

$\sin x$

$\cos x$

sono analitiche su tutto $\mathbb{R}$.

Oss. La funzione $\frac{1}{1-x}$ è analitica in $(-1, 1)$

La sua serie di Taylor è $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e questa è una geometrica

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \rightsquigarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$$

Nota bene: Non potrei usare i criteri precedenti per dimostrare l'analiticità di questa $f(x)$.

Come dimostro che $f(x) = \log(1+x)$ è analitica?

Non posso usare i criteri di prima.

Uso che $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ (canto di prima)

Voglio dim. che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Questo segue dal teorema di scambio della derivata:

chiamo $S_n(x)$ le somme parziali della serie del $\log(1+x)$

So che

$$S_n'(x) \rightarrow \frac{1}{1+x} = f'(x) \quad (\text{conv. unif. su } [-A, A] \text{ per ogni } 0 < A < 1)$$

$$S_n(0) \rightarrow 0 = f(0) \quad (\text{conv. in un punto})$$

$$\Rightarrow S_n(x) \rightarrow f(x) \text{ unif. su } [-A, A] \text{ per ogni } 0 < A < 1.$$

$f(x) = \arctan x$ è analitica intanto in $(-1, 1)$

Basta guardare $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$
↑
geometrica

Ora faccio la primitiva

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è analitica in $(-1, 1)$.

Devo dim. che $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n =: \varphi(x)$

Non si può usare il criterio. Pongo $g(x) := \frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha}$

Osservo che $g(0) = 1$. Se dimostro che $g(x)$ è costante sono ok.
Calcolo la derivata

$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)}{(1+x)^\alpha} - \varphi(x) \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} = \frac{(1+x)\varphi'(x) - \alpha\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

Claim: $(1+x)\varphi'(x) = \alpha\varphi(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} (1+x)\varphi'(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n \\ &\stackrel{\text{shift degli indici}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n+1} (n+1) + \binom{\alpha}{n} n \right] x^n = \alpha \varphi(x). \end{aligned}$$

$$\binom{\alpha}{n+1} (n+1) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} n$$

$$= \alpha \binom{\alpha}{n}$$

— 0 — 0 —

Def. Una funzione analitica si dice **INTERA** se il raggio di convergenza della serie di Taylor in un punto è $+\infty$ (e di conseguenza del teo. 1 il raggio è $+\infty$ in tutti i punti).

Esempi: e^x , $\sin x$, $\cos x$ sono intere

$\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^\alpha$ no.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

—

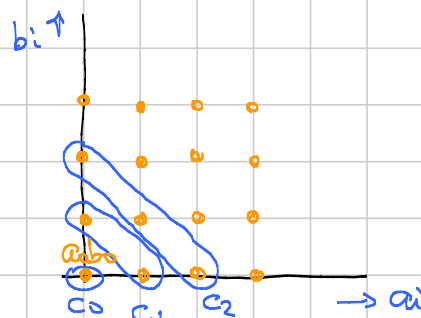
LEZIONE 097

Titolo nota

06/04/2016

Parentesi di Analisi 1: **PRODOTTO DI CAUCHY DI SERIE**Siano date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Il loro prodotto è $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$



Brutalmente: $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$
 $= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{c_2} + \dots$

Speranza: se $\sum a_n = A_\infty$ e $\sum b_n = B_\infty$, allora

$$\sum c_n = A_\infty \cdot B_\infty$$

In generale è falso, ma è vero se una delle due (almeno) è assolutamente convergente.

Esempio $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. le serie convergono (Leibnitz) ma non assolutamente.

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}}$$

Dico che $|c_n| \rightarrow 0$, quindi manca la cond. nec.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow |c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1$$

Teorema Supponiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A_{\infty} \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B_{\infty} \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Allora, definiti i c_n come sopra, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A_{\infty} B_{\infty}$

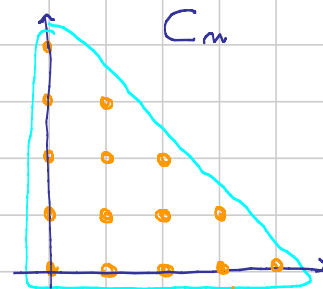
Dim. Siano C_n le somme parziali di $\sum c_n$

$$C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

↑
per
colonne

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \quad (b_n := b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} (b_k - B_{\infty}) + \underbrace{B_{\infty} A_n}_{A_{\infty} \cdot B_{\infty}} \quad (A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n)$$



A siamo quindi ridotti a dim. che

$$\sum_{k=0}^n |a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Idea:

$$\sum_{k=0}^n |a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}| = \sum_{k=0}^{m_0} \underbrace{|a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}|}_{\substack{\text{piccoli se} \\ n-k \text{ è molto} \\ \text{grande}}} + \sum_{k=m_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot \underbrace{|b_k - B_{\infty}|}_{\substack{\text{piccoli se} \\ m_0 \text{ è grande}}}$$

Cerco di formalizzare in modo ordinato

① mi viene dato $\varepsilon > 0$

② Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che, posto $\hat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, si abbia

$$|b_k - B_{\infty}| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{A} + 1} \quad \forall k \geq m_0$$

③ Posso $\hat{B} := \max_{k \in \mathbb{N}} |B_k - B_\infty|$ (esiste perché $B_k \rightarrow B_\infty$)

e scelgo $l_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_i| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{B}+1} \quad \forall i \geq l_0$

(posso perché $|a_i| \rightarrow 0$)

④ Posso $m_0 = m_0 + l_0$ e dimostro che la somma che mi interessa è $\leq \varepsilon$ per ogni $n \geq m_0$

$$\sum_{k=m_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{A}+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\hat{A}} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{A}+1}$$

$$\sum_{k=0}^{m_0} |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

$\uparrow$
 $\geq m_0 - m_0 = l_0$
 $\leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{B}+1}$

Questo dimostra che va a 0.

— 0 — 0 —

Corollario Il prodotto di due serie di potenze è una serie di potenze che converge al prodotto delle somme

Dim. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n x^n}_{\alpha_n} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n x^n}_{\beta_n}$

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} = x^n \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}_{c_n}$$

La serie prodotto è la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ con $c_n =$

Questa serie, all'interno del raggio di convergenza delle due serie di partenza, converge a $f(x)g(x)$.

(all'interno del raggio convergono entrambe assolutamente).

COROLLARIO Il prodotto di due funzioni analitiche è analitico.

Dam. $a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ $b_m = \frac{g^{(m)}(0)}{m!}$

c_m dovrebbe diventare $\frac{[f(x)g(x)]^{(m)}}{m!}$ calcolata in $x=0$

Per calcolare la derivata n -esima di un prodotto si calcola con la FORMULA DI LEIBNITZ

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Ora

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(m-k)}(0)}{(m-k)!} \quad \frac{m!}{m!} \rightarrow \text{fuori} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{serie prodotto} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(0) g^{(m-k)}(0) \\ &= \frac{1}{m!} [f \cdot g]^{(m)} \end{aligned}$$

Quindi i coeff. della serie prodotto, che sappiamo convergere a $f(x) \cdot g(x)$, sono proprio le derivate del prodotto diviso il fattoriale.

Esercizio $e^x \cdot e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \right)$

Moltiplico le 2 serie $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \cdot \frac{1}{(n-k)!} y^{n-k} \quad \frac{m!}{m!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} (x+y)^n \end{aligned}$$

Quindi

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Oss. In questo modo uno potrebbe

→ definire la funzione e^x come somma della serie

→ riottenere la proprietà $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ come conseguenza del prodotto di serie.

Oss. Tutta la teoria delle serie di potenze si può fare con $x \in \mathbb{C}$ invece di $x \in \mathbb{R}$, e volendo pure i coeff $\in \mathbb{C}$. L'assoluta convergenza è sostituita dalla convergenza delle norme.

Quindi allo stesso modo posso definire l'esponentiale con esponente $x+iy \in \mathbb{C}$ e vale

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

↑
vero
 e^x

↑
se metto iy nella serie viene

$\cos y + i \sin y$

↑ ↑
definiti come somma
della loro serie.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 098

Titolo nota

07/04/2016

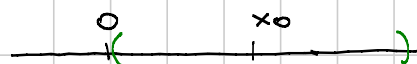
Esercizio Dimostrare che $f(x) = \frac{1}{x}$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Oss. Ricorda $\frac{1}{1+x}$ che è analitica almeno in $(-1, 1)$, quindi $f(x)$ è analitica almeno in $(0, 2)$, ma non ci basta.

Calcolo la derivata k -esima: $f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$.

Scelto un pto $x_0 \neq 0$, wlog $x_0 > 0$,
la serie di Taylor diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x_0^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} (x - x_0)^n$$



Questa ha $R = x_0$ ($\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow \frac{1}{x_0} = L \leadsto R = \frac{1}{L}$)

Ho dim. che la serie converge, ma mi serve che converga a $f(x)$.

Metodo 1 Uso il criterio di analiticità: se

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k!}{r^k} \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

allora f è analitica in $(x_0 - r, x_0 + r)$

$$|f^{(k)}(x)| = \frac{k!}{x^{k+1}} \leq M \frac{k!}{r^k} \quad \text{vera} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 - r)^{k+1}} \leq \frac{M}{r^k}$$

Qui la serie di Taylor
converge a $f(x)$



$$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{x_0 - r} \right)^k \leq M (x_0 - r)$$

$\uparrow$
sewe ≤ 1

$$r \leq x_0 - r \quad r \leq \frac{x_0}{2}$$

Questo comunque basta.

Metodo 2 Uso fuocosamente la geometria

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_0}}_y} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(-1)^n \frac{(x - x_0)^n}{x_0^n}}^{(-y)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} (x - x_0)^n$$

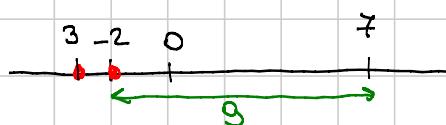
per $y \in (-1, 1)$, cioè $|x - x_0| < x_0$

Questo mostra direttamente la convergenza in $(0, 2x_0)$

Variaute $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ $x_0 = 7$

Dico: $f(x)$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ e la serie di Taylor con centro in $x_0 = 7$ ha $R = 9$

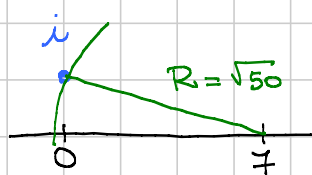
$$f(x) = \frac{A}{\underbrace{x+2}_{R=9}} + \frac{B}{\underbrace{x+3}_{R=10}}$$



Quindi è la somma di 2 volte l'esempio precedente

Variaute $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x_0 = 7$ $R = \sqrt{50}$

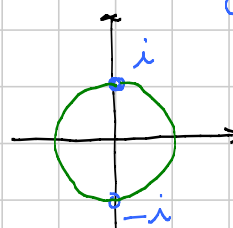
$$f(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right)$$



Posso svilupparla come prima $\frac{1}{x-i} = \frac{1}{7 + (x-i-7)}$

$$= \frac{1}{7} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x-i-7}{7}}_y}$$

Oss. Il raggio di conv. della serie di Taylor di $\arctan x$ con centro in $x_0 = 0$ è 1



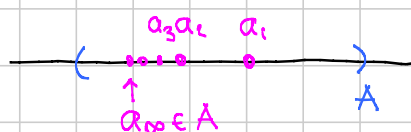
Prop. (Rigidità delle funzioni analitiche)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto connesso, e sia $f \in C^\omega(A)$, e sia f non identicamente nulla.

Allora $\{x \in A : f(x) = 0\}$ non ha pti di accumulazione in A

Corollario Se due funzioni analitiche coincidono su una successione convergente, allora coincidono ovunque

Se $f(a_n) = g(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
allora $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$



Achtung! $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ è analitica per $x \neq 0$ (composiz. di funzioni analitiche)

Gli zeri di $f(x)$ sono una succ. che converge, ma $0 \notin \partial A$

Dim. Prop. Basta dim. che ogni zero di $f(x)$ è isolato.

Supponiamo wlog $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Voglio trovare $\varepsilon > 0$ t.c. $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cup (0, \varepsilon)$

Sviluppo in serie

$$f(x) = \underbrace{a_k}_{\neq 0} x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots = x^k \underbrace{(a_k + a_{k+1} x + \dots)}_{\substack{\neq 0 \\ \uparrow \\ \text{per } x \neq 0}} \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{analitica e} \\ \text{in particolare CONTINUA}}}$$

$g(0) \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$
in un intorno di 0.

— 0 — 0 —

Quello che ho dimostrato è una forma di alternativa

→ 0 x_0 è isolato

→ 0 $f(x) \equiv 0$ in un intorno di x_0

— 0 — 0 —

Esercizio Sia $f(x)$ analitica in $(-2,2)$
 Supponiamo $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (-2,2)$
 Allora esistono $\alpha \in (0,1)$ e $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f'(x)| \leq M [f(x)]^\alpha \quad \forall x \in [-1,1]$$

[Dim.] Divido e spero

$$g(x) = \frac{|f'(x)|}{[f(x)]^\alpha} \quad \text{per gli } x \text{ t.c. } f(x) \neq 0$$

Prima osservo che dove $f(x_0) = 0$ anche $f'(x_0) = 0$ perché x_0 sarebbe pto di min. e quindi è tutto ok qualunque siano M ed α

I pti in cui f si annulla in $[-1,1]$ sono un numero finito.

Su ognuno di questi pti c'è un ordine di annullamento.

Prendo $\alpha = \frac{1}{2}$. Voglio far vedere che $g(x)$ ha limite finito in tutti i pti di annullamento di $f(x)$.

Sia x_0 un pto di annullamento. Allora $f(x) \sim a_k (x-x_0)^k$
 $f'(x) \sim k a_k (x-x_0)^{k-1}$

Ma allora

$$g(x) = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|^{1/2}} \sim \frac{|k a_k (x-x_0)^{k-1}|}{|a_k| |x-x_0|^{k/2}}$$

$k-1 \geq \frac{k}{2}$
 quindi liminf
 e limsup
 sono FINITI !!!

Senza che $k \geq 2$ (se fosse $k=1$ f cambierebbe segno).

ANALISI 2

-

LEZIONE 099

Titolo nota

07/04/2016

Calcolo somma serie di potenze

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n+3} \quad R=1$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+3}$$

$x^3 = y$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+3} = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+3}}{n+3}$$

$$= \frac{1}{y^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \frac{1}{y^3} \left(\underbrace{-\log(1-y)}_{\text{serie se partiva da } n=1} - y - \frac{y^2}{2} \right)$$

Torno in x e ottengo

$$= x \frac{1}{x^3} \left(-\log(1-x^3) - x^3 - \frac{x^6}{2} \right) = \frac{1}{x^2} (\dots)$$

Achtung! Il termine $\frac{1}{x^2}$ sotto non deve preoccupare, perché il numeratore è di ordine 3, quindi avanza 1.

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{(2n)!}$ intanto converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Sembra un po' $\cos x$. Pongo $x = y^2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{y^4}{4!} + \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots = \cos y - 1 - \frac{1}{2} y^2$$

$$= \cos \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{2} x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{(2n)!} = \cos \sqrt{7} - 1 - \frac{7}{2} \quad (\text{oss. } R = +\infty)$$

— 0 — 0 —

Esercizio 3 $\sum \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} x^n$ $R = \frac{5}{3}$ ($L = \frac{3}{5}$)

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$

Chi è c_n Non è $c_n = n!$

$$c_n = \begin{cases} k! & \text{se } n = k^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi il limite che devo fare è $\sqrt[n^2]{n!} = 1$ (Analisi 1)

$$\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} n \rightarrow 1$$

VBEGIN {BRUTAL} (Euler...)

Passo 1 $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-1} + \dots = 0$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ radici

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^2 - 2 \sum \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{a_{k-1}^2}{a_k^2} - 2 \frac{a_{k-2}}{a_k} = \frac{a_{k-1}^2 - 2 a_k a_{k-2}}{a_k^2} \end{aligned}$$

Passo 2 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k = 0$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{a_1^2 - 2 a_0 a_2}{a_0^2}$$

Infatti $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$ sono le radici del polinomio $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots$

Passo 3 Facciamo finta che lo stesso valga per le serie di potenze

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

Le radici sono $\lambda_k = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Somma $\square$ reciproci radici = $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} = \frac{1}{3}$

$\uparrow$ $\pm k$ $\uparrow$ formula $\uparrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

END {BRUTAL MODE}

Esercizio 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$
 $\forall x \in (-1, 1)$

Dim. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Posso derivare k volte per il teo. di scambio

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} k! \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$\uparrow$ indagine

Esercizio 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$n^2 = 2 \frac{n^2}{2} = 2 \frac{n^2 - n + n}{2}$$

$$= 2 \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^n \\ &= 2x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2}}_{\text{esercizio 5}} + x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^{n-1}}_{\text{esercizio 5}} \end{aligned}$$

Oss. Allo stesso modo si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$$

$\uparrow$ polinomio in n

Esercizio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+4n+3} x^n$

$$\frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1}$$

e ciascuno di questi lo so fare.

Esercizio 8 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$

Come posso stimare $|f^{(k)}(x)|$ all'interno del raggio di conv.?

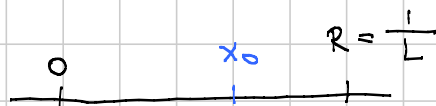
Sia $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora supponendo $L \in (0, +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |a_n| \leq M_\varepsilon (L + \varepsilon)^n$$

(analisi 1)

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n k! \binom{n}{k} x^{n-k} \right| \\ &\leq k! \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \binom{n}{k} |x|^{n-k} \\ &\leq \underset{(L+\varepsilon)^k}{M_\varepsilon k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} (L+\varepsilon)^{n-k} |x|^{n-k} \\ &= M_\varepsilon k! (L+\varepsilon)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} [(L+\varepsilon)|x|]^{n-k} \\ &= M_\varepsilon k! (L+\varepsilon)^k \frac{1}{[1 - (L+\varepsilon)|x|]^{k+1}} \\ &= M_\varepsilon k! \frac{1}{[1 - (L+\varepsilon)|x|]} \frac{1}{\left[\frac{1}{L+\varepsilon} - |x|\right]^k} \end{aligned}$$

Il giorno in cui vado a scrivere
la serie di Taylor in $x = x_0$
i coeff. sono



$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \sim M_\varepsilon \frac{1}{\dots} \left[\frac{1}{\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|} \right]^k = \alpha_k$$

Quale è il raggio di convergenza di

$$\sum a_n (x-x_0)^n$$

Basta osservare che $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{L} - |x_0|}$ in realtà

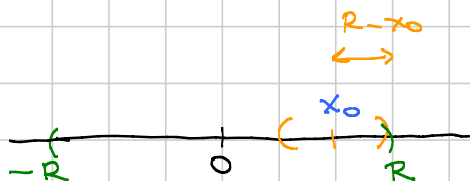
col essere rigorosi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{L} - |x_0|} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ma allora è vera anche per $\varepsilon = 0$, quindi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{L} - |x_0|} = \frac{1}{R - |x_0|}$$

$\Rightarrow$ il raggio di conv. della serie centrata in x_0 è $\geq R - |x_0|$



Cosa dovrai dimostrare? Che la somma della serie nuova è la stessa funzione, ma questo si può fare usando il criterio di analiticità come fatto alla let. precedente.
(viene con un raggio + piccolo).

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 100

Titolo nota

08/04/2016

Esercizio $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformi.Posso dire che $\sin f_n(x) \rightarrow \sin f_\infty(x)$?

Se si trattasse di puntuale, la risposta è sì e più in generale

 $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente + φ continua $\Rightarrow \varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f_\infty(x))$ puntualmentePer la uniforme, nel caso di $\sin$ uso la lip.

$$|\sin(f_\infty(x)) - \sin(f_n(x))| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)|$$

 $\Rightarrow$ conv. uniformeIn realtà basta l'uniforme continuità**Prop.** Siano S un insieme, (X, d_X) uno sp. metrico, (Y, d_Y) un altro spazio metrico.Siano $f_n: S \rightarrow X$ e $f_\infty: S \rightarrow X$ Sia $\varphi: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in S (ii) φ sia unif. continua

Allora

$$S \xrightarrow{f_n} X \xrightarrow{\varphi} Y$$

 $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f_\infty)$ unif. in S (come funzioni da S in Y).

Dim. Devo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall s \in S \quad d_y(\varphi(f_\infty(s)), \varphi(f_n(s))) \leq \varepsilon$$

Prendo, dato $\varepsilon > 0$, il δ corrispondente nella def. di unif. cont. di φ . Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq m_0 \quad \forall s \in S \quad d_x(f_\infty(s), f_n(s)) \leq \delta \quad (\text{posso per la (i)})$$

Grazie all' unif. cont. di φ

$$d_y(\varphi(f_\infty(s)), \varphi(f_n(s))) \leq \varepsilon \quad \forall s \in S.$$

Oss. La semplice continuità di φ in generale non basta

$$S = (0, +\infty) \quad f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \quad f_\infty(x) = \frac{1}{x}$$

$$\varphi(x) = x^2 \quad \varphi(f_n(x)) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{nx} \quad \varphi(f_\infty(x)) = \frac{1}{x^2}$$

C'è conv. puntuale, ma non conv. unif. in $(0, +\infty)$

$$|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f_\infty(x))| = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{nx}$$

il sup del LHS in x è $+\infty$ e quindi non tende a 0.

Prop. Sia $[a, b]$ un intervallo. Siano $f_n, f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $[a, b]$

(ii) φ continua (e basta).

Allora

$$\varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f_\infty(x)) \quad \text{unif. in } [a, b].$$

Dim. Esiste $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(e quindi lo stesso vale per $f_\infty(x)$). A questo pto basta considerare φ ristretta a K e questa è unif. cont.

Perché esiste K ? Occhio alle dim. sbagliate: unione num. di cpt. non è cpt.

Idea:

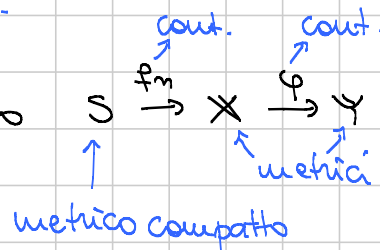
- immagine di f_∞ è $\subseteq [-A, A]$
- considero $[-A-1, A+1]$: qui ci sta il grafico di $f_n(x)$ per ogni $n \geq n_0$
- Considero



$$K = [-A-1, A+1] \cup f_1([a,b]) \cup \dots \cup f_{n_0}([a,b])$$

(unione finita di compatti).

Oss. Vale una generalizz. in un contesto



Variaute: $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. $\stackrel{?}{\Rightarrow} f_n(\sin x) \rightarrow f_\infty(\sin x)$ unif.

$f_n, f_\infty : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Supp. $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. su $[0, 1]$.

Allora

$f_n(\sin x) \rightarrow f_\infty(\sin x)$ unif. in $\mathbb{R}$

Dim. (Ovvio) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_\infty(\sin x) - f_n(\sin x)| =$

$$= \sup_{y \in [-1, 1]} |f_\infty(y) - f_n(y)| \rightarrow 0 \text{ per def. } \square$$

Domanda $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) tutte le $f_n(x)$ sono periodiche, ma con periodo che dipende da n

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti

Posso concludere che f_∞ è periodica?

Risposta: NO $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ (sono tutte periodiche)

Si vede (analisi 1) che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := x$ puntualmente
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Dico che la conv. è unif. sui cpt.

Mi metto wlog in $[0, A]$ (in $[-A, 0]$ la situaz. è simm.)

$$t - \frac{1}{6}t^3 \leq \sin t \leq t \quad \forall t \geq 0$$

$$\frac{x}{n} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{n^3} \leq \sin\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

$$x - \frac{x^3}{6n^2} \leq \underbrace{n \sin \frac{x}{n}}_{f_n} \leq \underbrace{x}_{f_\infty}$$

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{x^3}{6n^2} \quad \forall x \geq 0$$

$$\sup_{x \in [0, A]} |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{A^3}{6n^2} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Oss. Non è vero che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. su $\mathbb{R}$ perché le $f_n(x)$ sono limitate su $\mathbb{R}$, ma f_∞ non lo è.

Domanda più seria: e se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. su $\mathbb{R}$, posso dedurre che f_∞ è periodica?

Risposta: NO

Esempio: considero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) =: S_{\infty}(x)$$

Questa conv. unif. su tutto $\mathbb{R}$, perché conv. tot. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\dots| = \frac{1}{n^2}$

Analizzo $S_n(x)$ le somme parziali e osservo che

$$S_n(x) \longrightarrow S_{\infty}(x) \quad \text{unif. in } \mathbb{R}$$

tutte le $S_n(x)$ sono periodiche di periodo $2\pi \cdot 2^n$ (periodo dell'ultimo sin)

Mi resta da dim. che $S_{\infty}(x)$ NON è periodica.

Strategia:

→ $S_{\infty}(x)$ è di classe C^1 in quanto anche la serie delle derivate converge totalm., quindi unif., su tutto $\mathbb{R}$ (allo stesso modo è C^{∞})

$$\rightarrow S'_{\infty}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{2^n} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \Big|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$$

$$\rightarrow S'_{\infty}(x) \leq S'_{\infty}(0) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad (\text{basta osservare che i } \cos \leq 1)$$

→ Se $S'_{\infty}(x)$ fosse periodica, allora esisterebbe $T > 0$ t.c.

$S'_{\infty}(T) = S'_{\infty}(0)$, ma questo è possibile solo se

$$\cos\left(\frac{T}{2^n}\right) = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

ma questo è impossibile per n grande poiché $0 < \frac{T}{2^n} < \pi$ e qui $\cos(\cdot) < 1$ stretto.

ANALISI 2 - LEZIONE 101

Titolo nota

08/04/2016

Esercizio (Grande classico)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} \quad \text{dove } a \text{ è un parametro } a > 0$$

Parte standard: dimostrare che $f \in C^1((0, +\infty))$ per ogni $a > 0$

Dim. Intanto la serie conv. puntualmente per ogni $x \geq 0$
 (per $x=0$ è ovvio, per $x>0$ confr. asint. con $\frac{1}{n^2}$)
 Dico che la serie converge unif. sui cpt. di $(0, +\infty)$
 cioè in tutti gli intervalli $[A, B]$ con $0 < A < B$.
 Questo mi darebbe la continuità su $(0, +\infty)$.
 Per dim. spero nella totale

$$\sup_{x \in [A, B]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [A, B]} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} \leq \frac{B^a}{1+n^2 A^2}$$

↑
num. + grande
denom. + piccolo

Ora $\sum \frac{B^a}{1+n^2 A^2} < +\infty \Rightarrow$ ho conv. unif. per M-test di Weierstrass

Per l'essere C^1 spero nella serie delle derivate

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{a x^{a-1} (1+n^2 x^2) - 2n^2 x \cdot x^a}{(1+n^2 x^2)^2} \\ &= \frac{a x^{a-1} + (a-2) n^2 x^{a+1}}{(1+n^2 x^2)^2} \end{aligned}$$

Come prima $\sup_{x \in [A, B]} |f'_n(x)| \sim \frac{n^2}{n^4} \Rightarrow$ tutto ok

Domande più serie : calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

① Se $a > 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\underbrace{f(x)}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{f_4(x)}_{\downarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty} = \frac{x^4}{1+49x^2}$$

Non ho usato : teoremi di scambio.

② Se $a = 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Vorrei tanto poter usare il teorema di scambio, ma per farlo mi serve convergenza unif. in $[A, +\infty)$ per un qualche $A > 0$.

$$\sum \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

$f_n(x)$

$\sup_{x>0} f_n(x)$ provo a calcolarlo



Studio $f_n(x)$ usando la derivata fatta prima.

$$f'_n(x) = \frac{ax^{a-1} + (a-2)n^2x^{a+1}}{(1+n^2x^2)^2} \quad \text{se } a=2 \text{ è } f'_n(x) > 0$$

Ma allora per $a=2$ $\sup_{x>0} f_n(x) = \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow$ c'è convergenza uniforme in $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ vale il teorema di scambio.

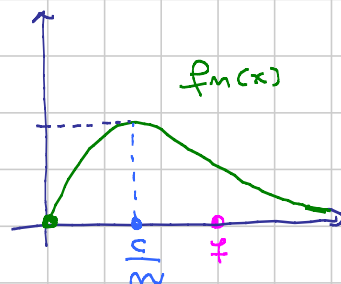
Tra l'altro anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ per il te. di scambio a $x \rightarrow 0^+$.

③ Se $a < 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Studio nuovamente di $f_n(x)$

$$f'_n(x) = \frac{x^{a-1} [a - (2-a)n^2 x^2]}{(\dots)^2}$$

Definitivamente $f_n(x)$ sono decrescenti in $[7, +\infty)$, quindi

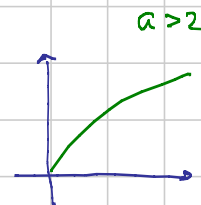


$$\sup_{x \geq 7} f_n(x) = f_n(7) = \frac{7^a}{1 + 48n^2} \leadsto \text{serie convergente}$$

$\Rightarrow$ conv. unif. in $[7, +\infty) \Rightarrow$ teo. di scambio $\Rightarrow \text{😊}$

④ Per $a \geq 2$ è facile che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Infatti le $f_n(x)$ sono crescenti, quindi

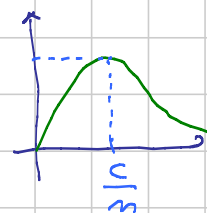


$$\sup_{x \in (0, 7]} f_n(x) = f_n(7) = \text{come prima} \leadsto$$

$\Rightarrow$ conv. unif. in $(0, 7] \Rightarrow$ teo. di scambio a $0^+ \Rightarrow \text{😊}$

⑤ Per $a < 2$ non è più vero che sono crescenti

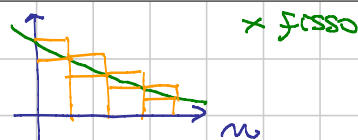
$$f_n\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{\left(\frac{c}{n}\right)^a}{1 + n^2 \frac{c^2}{n^2}} = \frac{c^a}{1 + c^2} \frac{1}{n^a}$$



$\Rightarrow$ per $a > 1$ ho conv. unif. in $(0, +\infty) \Rightarrow$ teo. di scambio, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad \text{Per } a > 1$$

⑥ Per $a=1$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

CONFRONTO SERIE - INTEGRALE

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy \\ &= [\arctan(xy)]_{y=1}^{y=+\infty} = [\arctan(xy)]_{y=0}^{y=+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan x \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Questo mostra che $f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow 0^+$.

Oss. Per il confronto serie integrali è fondamentale che fissato x si ha che $f_n(x)$ è monotono in n .

⑦ Per $a < 1$ si ha che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-a}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}}_{\frac{\pi}{2}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $\frac{\pi}{2}$

Ho anche ordine di infinitesimo e parte principale.

— 0 — 0 —

Esercizio

$$u(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-n^2 t} \sin(nx) \cdot a_n}_{f_n(t, x)}$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

① u è continua in $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$
 $t \quad x$

$$|f_n(t, x)| \leq |a_n| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ la serie converge unif. $\Rightarrow$ il limite è ben definito e continuo.

② u_t è continua in $[A, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $A > 0$

$$\begin{aligned} |\partial_t f_n(t, x)| &= |-n^2 e^{-n^2 t} \sin(nx) a_n| \\ &\leq n^2 |a_n| e^{-n^2 A} \end{aligned}$$

$\leadsto$ se $A > 0$ la serie converge $\Rightarrow \partial_t f_n$ conv. unif.

$\Rightarrow u_t$ è continua in $[A, +\infty) \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_t \in C^0((0, +\infty) \times \mathbb{R})$

③ u_x è continua in $[A, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $A > 0$

Stessa dim. di sopra

④ Per lo stesso motivo $u \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$

⑤ La funzione $u(t, x)$ verifica

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le due derivate esistono e sono somma della stessa serie!

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 102

Titolo nota

13/04/2016

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

TEORIA: → ESISTENZA LOCALE → teo. contrazioni (completezza)
 → approssimazione (compattezza)
 → UNICITÀ → teo. contrazioni
 → Lemma di GRONWALL
 → sopra / sottosoluzioni
 → ESISTENZA GLOBALE → teo. alternativa + stime sulle soluzioni

ESERCIZI → Studio qualitativo delle soluzioni (disegnare la soluzione senza saper risolvere l'equazione) per equazioni di ordine 1
 → Equazioni di ordine 2
 → Sistemi di più equazioni.
 — o — o —

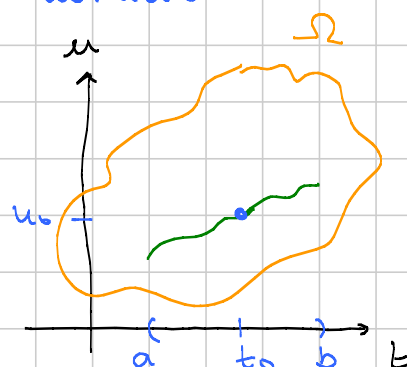
Riepilogo notazioni

$$u' = f(t, u)$$

eq. diff. in forma normale

 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Risolvere il problema di Cauchy vuol dire trovare

$$u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

↑ $\bar{u}$ tra le incognite

- $u \in C^1((a, b))$
- $t_0 \in (a, b)$ e $u(t_0) = u_0$
- $(t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t \in (a, b)$
- $u'(t) = f(t, u(t))$ "

Un sistema di eq. diff. ha lo stesso aspetto
con la diff. che
$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

- $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$
come prima
- $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 t u
- $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$

Fatto generale Una equazione di ordine n

$$u^{(n)} = f(t, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

La posso sempre trasformare in un sistema di ordine 1

$$\begin{array}{l} u_1 = u \\ u_2 = u' \\ \vdots \\ u_m = u^{(m-1)} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_m' = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{array}}$$

funzioni di t

$$U' = F(t, U)$$

Conseguenza: basta fare la teoria per sistemi di ordine 1

Oss. "Se so risolvere nel futuro, allora so risolvere nel passato"

Supponiamo $u: [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione con $u(t_0) = u_0$
 $u: (a, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione con $u(t_0) = u_0$

Allora ricollando ho una soluzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Nota bene: basta assumere u continua in $[t_0, b)$ e $(a, t_0]$
 u derivabile in (t_0, b) e (a, t_0)
e automaticamente sarà derivabile in (a, b)

Dim. Bisogna solo dim. che u è derivabile in t_0 .

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u'(t_0 + c(h))}{1}$$

Lagrange

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} f(z_0 + c(h), u(z_0 + c(h)))$$

$= f(t_0, u_0)$ ← serve solo che u è continua in t_0 .

Stesso discorso per $Q \rightarrow 0^-$ da cui $u'(t_0) = f(t_0, u_0)$.

FORMULAZIONE INTEGRALE Assumo sempre f continua

(Pb-Diff.) $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

(Pb-Int.) $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$

PROPOSIZIONE I seguenti due problemi sono equiv.

① Trovare $u \in C^0([t_0, b)) \cap C^1((t_0, b))$ che risolva (Pb-Diff.) su $[t_0, b)$

② Trovare $u \in C^0([t_0, b])$ che soddisfa (Pb-Int) su $[t_0, b]$.

Dtm. ① $\Rightarrow$ ② Allora u ha già ben più della regolarità che serve. Integrando l'eq. diff. in $[t_0, t]$ ottengo

$$u'(t) = f(t, u(t)) \leadsto \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$
$$\quad\quad\quad "$$
$$u(t) - u(t_0)$$
$$= u(t) - u_0$$

② $\Rightarrow$ ① Devo mostrare 2 cose, eq. diff. + condizioni in t_0 .

Sostituisco t_0 : $u(t_0) = u_0 + \int_{t_0}^{t_0} \dots = u_0$

Osservo che $f(s, u(s))$ è continua, quindi $u(t)$ che ne è una primitiva è C^1 e la sua derivata è proprio

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{no eq. diff.}$$

Teorema di esistenza e unicità

LOCALE

Consideriamo il solito problema di Cauchy $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

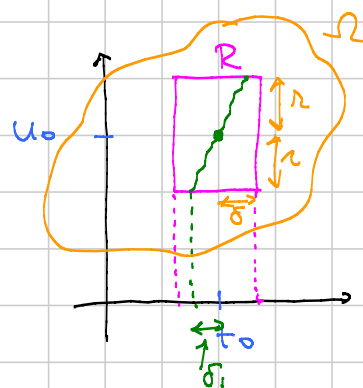
Supponiamo $\delta > 0$, $r > 0$, $f: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - r, u_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo

- (i) f continua in R
- (ii) f lipschitziana in u , unif. rispetto a t , in R , cioè esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

$$\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad \forall (u_1, u_2) \in [u_0 - r, u_0 + r]^2$$

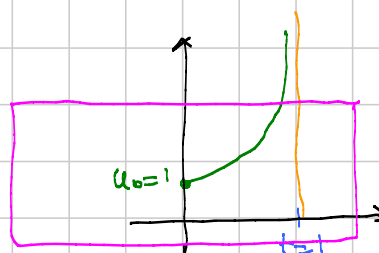


Allora esiste $\delta_1 \in (0, \delta]$ ed esiste un'UNICA funzione $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ che risolve il problema

Esempio classico

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = \frac{1}{1-t}$



Teorema di sola esistenza LOCALE Tutto come sopra, ma senza l'ipotesi (ii).

Allora stessa tesi tranne l'unicità.

Esempio (classico di non unicità)

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{continua ma non Dip. in un intorno di } u_0 = 0$$

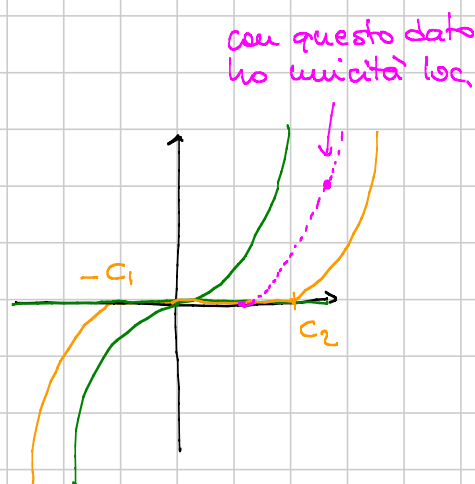
Il problema ammette infinite soluzioni.
Due si vedono subito:

$$\begin{aligned} u(t) &\equiv 0 \\ u(t) &= t^3 \end{aligned}$$

In realtà ho famiglia a 2 parametri

$$u(t) = \begin{cases} (t-c_2)^3 & t \geq c_2 \\ 0 & t \in [-c_1, c_2] \\ (t+c_1)^3 & t \leq -c_1 \end{cases}$$

— 0 — 0 —



ANALISI 2

LEZIONE 103

Titolo nota

13/04/2016

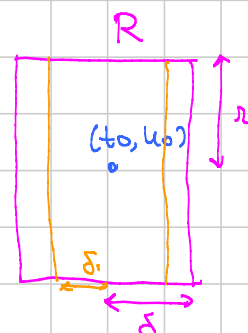
Dim. teo. esistenza e unicità

- ① ESISTENZA ALLA CAUCHY - LIPSCHITZ
- ② ESISTENZA ALLA PICARD - LINDELÖF
- ③ ESISTENZA CON NOTTE PESATE
- ④ UNICITÀ

① CAUCHY - LIPSCHITZ Siano f, δ, r, t_0, u_0 come nell'enunciato.

Poi siamo

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

Sia $\delta_1 > 0$ tale che

formare la contrazione

$$\delta_1 \leq \delta$$

ovvia

$$\delta_1 \leq \frac{r}{M}$$

non scappa in vert.

$$\delta_1 < \frac{1}{L}$$

← cost. lip.

Allora esiste una soluzione $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\uparrow$$

 $[u_0 - r, u_0 + r]$

Dim. Mi limito a trovare la soluzione in $[t_0, t_0 + \delta_1]$.
 Mi basta trovare una soluzione di classe C^0 del problema integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Considero lo spazio

$$X_{\delta_1, r} := \{ u: [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r] \text{ di classe } C^0 \}$$

Questo è un Banach rispetto alla solita norma, e quindi un metrico rispetto alla solita distanza

$$\text{dist}(u_1, u_2) := \sup \{ |u_1(t) - u_2(t)| : t \in [t_0, t_0 + \delta_1] \}$$

Considero la funzione $\Phi : X_{\delta, \varepsilon} \rightarrow X_{\delta, \varepsilon}$ definita così

$$[\Phi(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Claim: se δ verifica le 3 disuguaglianze, allora

Φ è definita tra gli spazi scritti sopra ed è una contrazione, quindi essendo $X_{\delta, \varepsilon}$ completo ha un punto fisso unico, cioè tale che

$$u = \Phi(u) \quad u(t) = [\Phi(u)](t)$$

che è equivalente alla formulazione integrale.

Ci sono 3 cose da dimostrare

(1) $X_{\delta, \varepsilon}$ è completo: fatto tante volte

(2) Φ mappa $X_{\delta, \varepsilon}$ in sé. L'unica cosa da verificare è che

$$[\Phi(u)](t) \in [u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon] \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$$\text{cioè} \quad \left| [\Phi(u)](t) - u_0 \right| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$$\text{cioè} \quad \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

Ora

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \\
 &\stackrel{\text{def. } M}{\leq} \int_{t_0}^t M ds \leq M \delta_1 \leq \eta \quad \uparrow \text{ipotesi su } \delta_1
 \end{aligned}$$

(3) Φ è una contrazione, cioè esiste $\Delta < 1$ t.c.

$$\text{dist}(\Phi(u_1), \Phi(u_2)) \leq \underbrace{\Delta}_{<1} \text{dist}(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \text{ in } X_{\delta_1, \eta}$$

$$\begin{aligned}
 |[\Phi(u_1)](t) - [\Phi(u_2)](t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds \\
 &\stackrel{\text{Lip}}{\leq} L \int_{t_0}^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \\
 &\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}(u_1, u_2) ds \\
 &\leq \boxed{L \delta_1} \text{dist}(u_1, u_2) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1] \\
 &\quad \Delta < 1 \text{ per ipotesi su } \delta_1
 \end{aligned}$$

Facendo il sup del LHS al variare di $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$ ottengo la disug.

$$\text{dist}(\underbrace{\Phi(u_1)}_0, \underbrace{\Phi(u_2)}_0) \leq \Delta \text{dist}(u_1, u_2).$$

Oss. Il peggior errore possibile è pensare di aver dimostrato anche l'unicità perché il pto fisso è unico.

② **PICARD-LINDELÖF** Siauo $f, \delta, r, t_0, u_0, R, L, M$ come prima.

Sia $\delta_1 > 0$ tale che

$$\delta_1 \leq \delta$$

$$\delta_1 \leq \frac{r}{M}$$

Allora esiste una soluzione $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$.

(Nessuna ipotesi, stessa tesi)

Dim. Introduco le ITERATE DI PICARD, cioè una succ. di funzioni $u_n: [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$ definite per ricorrenza così

$$u_0(t) \equiv u_0$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$$u_{n+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds$$

(Idea: se $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$, allora ho il p.to fisso come voluto)

Dimostro che intanto tutte le $u_n(t)$ hanno immagine in $[u_0 - r, u_0 + r]$ (è lo stesso conto di prima).

Voglio dim. che $\{u_n(t)\}$ è di Cauchy rispetto a dist.

Dico che $|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{L^n (t - t_0)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$

Inoltrazione

Aggiunto dopo video:
manca costante, vedi
LEZIONE 106

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{Lip}}{\leq} \int_{t_0}^t L |u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds \\
 & \leq \int_{t_0}^t L \cdot \frac{L^n (s-t_0)^n}{n!} ds = \frac{L^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^t (s-t_0)^n ds \\
 & = \frac{L^{n+1}}{n!} \frac{1}{n+1} [(s-t_0)^{n+1}]_{t_0}^t = \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1}
 \end{aligned}$$

Passo iniziale:

$$|u_1(t) - u_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_0) ds + \cancel{u_0} - \cancel{u_0} \right| \dots$$

Aggiunto dopo video: vedi LEZIONE 104 per sistematiche disuguaglianze.

Conclusione data la stima:
dalla stima segue che

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \frac{L^{n+1} \delta_1^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ma allora per $n \geq n_0$ avremo che

$$\begin{aligned}
 |u_m(t) - u_n(t)| & \leq |u_m(t) - u_{m-1}(t)| + |u_{m-1}(t) - \dots| + \dots \\
 & \leq \frac{L^m \delta_1^m}{m!} + \dots + \frac{L^{n+1} \delta_1^{n+1}}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{L^k \delta_1^k}{k!} \right)$$

la serie con questo termine converge qualunque siano L e δ_1 , quindi la sua coda tende a 0, quindi è $< \varepsilon$ per $n \geq n_0$

Una volta che $\{u_n(t)\}$ è di Cauchy, esiste

$$u_\infty : [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - 1, u_0 + 1]$$

tale che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ uniformemente

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ (basta \text{ puntuale}) \int u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds & & \end{array}$$

Ora se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e $f(t, u)$ è continua, allora

$$f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u_\infty(s)) \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta_1] \text{ e} \\ \text{quindi anche in } [t_0, t]$$

quindi posso scambiare limite e integrale.

ANALISI 2

-

LEZIONE 104

Titolo nota

14/04/2016

Dimostrazioni del teo. esistenza e unicità per eq. diff.Formulazione integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

Equazione di Volterra

 $\Phi: \text{funzioni} \rightarrow \text{funzioni}$

$$[\Phi(u)](t) = \text{RHS} = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in \dots$$

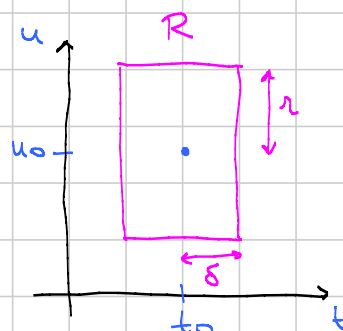
$$M := \sup \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

① Se $\delta_1 \leq \delta$ e $M\delta_1 \leq r$, allora

$$\Phi: X_{\delta_1, r} \rightarrow X_{\delta_1, r}$$

"

$$u: [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$$

② Se $L\delta_1 < 1$, allora Φ è una contrazione in $X_{\delta_1, r}$ che è metrico completo $\leadsto$ esistenza di una soluz. (Cauchy-Lip.)③ Stima più raffinata del RHS. Siano u e v in $X_{\delta_1, r}$

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \text{dist}(u, v) ds \end{aligned}$$

da cui

(★)

$$|[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| \leq L \operatorname{dist}(u, v) (t - t_0) \quad \forall t \in \dots$$

Ora si aprono 2 strade

③.1 Introduco le approssimanti di PICARD

$$u_0(t) \equiv u_0$$

$$u_{m+1}(t) := [\Phi(u_m)](t)$$

Si verifica che vale questa disuguaglianza

$$|u_{m+1}(t) - u_m(t)| \leq \operatorname{dist}(u_1, u_0) \frac{L^m (t - t_0)^m}{m!}$$

Dim. Induzione: per $m=0$ è ovvia e il passo induttivo è semplice

$$\begin{aligned} |u_{m+2}(t) - u_{m+1}(t)| &= |[\Phi(u_{m+1})](t) - [\Phi(u_m)](t)| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_{m+1}(s)) - f(s, u_m(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u_{m+1}(s) - u_m(s)| ds \\ (\text{uso Hp. indutt.}) &\rightarrow \leq L^{m+1} \frac{1}{m!} \operatorname{dist}(u_1, u_0) \int_{t_0}^t (s - t_0)^m ds \end{aligned}$$

facendo l'integrale concludo.

Da qui, grazie a $m!$ al denum., si dimostra che $\{u_m(t)\}$ è una succ. di Cauchy in $X_{\delta_1, \tau}$, senza ulteriori hp su f .

A quel p.to si passa al limite

$$\begin{aligned} u_{m+1}(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_m(s)) ds \\ \downarrow \\ u_\infty(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds \end{aligned}$$

- ③.2 Invece di considerare Φ , considero le sue potenze $\Phi^{(m)}$ (composizione m -volte)

$$\text{dist}(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \delta \cdot L \text{dist}(u, v)$$

Ripartendo da (*) riusciamo a dimostrare che

$$\text{dist}(\Phi^{(m)}(u), \Phi^{(m)}(v)) \leq \frac{(\delta \cdot L)^m}{m!} \text{dist}(u, v)$$

< 1 se m è abbastanza grande

Quindi per m abbastanza grande $\Phi^{(m)}$ è una contrazione, dunque ha un p.to fisso.

Questo fornisce una div. alternativa che le iterate di Picard convergono. Che un p.to fisso di $\Phi^{(m)}$ lo sia per Φ non è ovvio.

⊗ VEDI FONDO LEZIONE
(aggiunto dopo video)

- ④ $X_{\delta, 2, \Lambda}$ = stesso spazio di prima
= funzioni $u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow [u_0 - 2, u_0 + 2]$ continue

con una nuova distanza (proveniente da una nuova norma)

$$\text{dist}_\Lambda(u, v) := \sup \{ |u(t) - v(t)| e^{-\Lambda(t-t_0)} : t \in [t_0, t_0 + \delta] \}$$

Si verifica facilmente (esercizio) che $X_{\delta, 2, \Lambda}$ è uno spazio metrico completo.

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \\ &= L \int_{t_0}^t \underbrace{|u(s) - v(s)| e^{-\Lambda(s-t_0)}}_{\leq \text{dist}_\Lambda(u, v)} e^{\Lambda(s-t_0)} ds \\ &\leq L \text{dist}_\Lambda(u, v) \int_{t_0}^t e^{\Lambda(s-t_0)} ds \end{aligned}$$

Facendo l'integrale trovo

$$|[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| \leq L \operatorname{dist}_X(u, v) \frac{1}{\Lambda} [e^{\Lambda(t-t_0)} - 1]$$

$$\leq \frac{L}{\Lambda} \operatorname{dist}_X(u, v) e^{\Lambda(t-t_0)}$$

Portato l'esponenziale al LHS, e fatto il sup in t , ottengo

$$\operatorname{dist}_X(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \frac{L}{\Lambda} \operatorname{dist}_X(u, v) \quad \forall u, v \in \dots$$

Basta ora scegliere $\Lambda > L$ per avere una contrazione, e quindi un p.to fisso in $X_{\delta, r, \Lambda}$ senza ulteriori condizioni su δ .

Una volta che ho il p.to fisso è fatta.

Oss. Queste dimostrazioni funzionano per le equazioni.
Cosa cambia per i sistemi?
Poco o nulla.

$$f: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}_r(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X_{\delta, r} = \text{funzioni continue } u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \bar{B}_r(u_0)$$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 vettore vettore integrale di una funzione vettoriale

Le stime sono le stesse, solo che i valori assoluti diventano norme in $\mathbb{R}^m$.

Occhio: la stima $\|\int f(s, u(s))\| \leq \int \|f(s, u(s))\|$
è meno ovvia nel caso vettoriale (vedi lezione apposta).

Oss. Discorsi analoghi valgono per equazioni a valori in spazi di Hilbert.

Problema: come definire l'integrale per una funzione a valori in uno spazio vettoriale con una norma.

In maniera elementare, se voglio integrare solo funzioni continue o poco più, posso definirlo alla Riemann, con le partizioni taggate ecc... ecc...

Il teorema fondamentale del calcolo integrale è gratis con questa definizione

— o — o —

* Aggiunto dopo video: se $\Phi^{(n)}$ ha un unico p.to fisso, allora Φ ha un p.to fisso (unico, lo stesso)

DIMOSTRATO INIZIO LEZIONE 106

ANALISI 2 -

LEZIONE 105

Titolo nota

14/04/2016

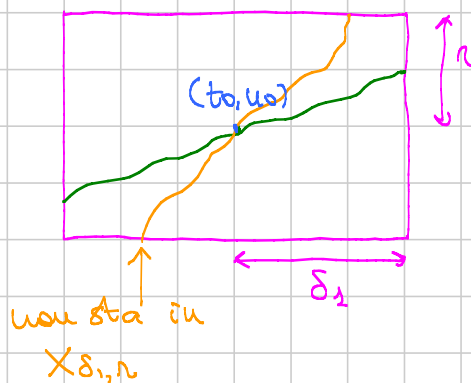
UNICITÀ

- ① Via contrazioni
- ② Via GRÖNWALL
- ③ Via sopra / sottosoluzioni

Dim. sbagliata: ho ottenuto la soluzione per contrazione, quindi p.to fisso unico, quindi sol. unica. (così si dimostra solo l'unicità in $X_{\delta_1, n}$)

① Sistemazione della dim. sbagliata

Idea: se ci fosse una soluz. diversa definita in $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$ con $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, posso considerare la volta in

 $X_{\delta_2, n}$


Per il teorema sappiamo che è una contrazione in $X_{\delta_2, n}$, il che esclude che questa nuova soluzione sia diversa in $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$.

Però potrebbero restare attaccate per un po' e poi staccarsi...

Dim.

La faccio solo nel futuro. Supponiamo di avere una soluzione $u^{(t)}$ in $[t_0, t_0 + \delta_1]$ e supponiamo di averne un'altra $v^{(t)}$ in $[t_0, t_0 + \delta_2]$ con $\delta_2 < \delta_1$.

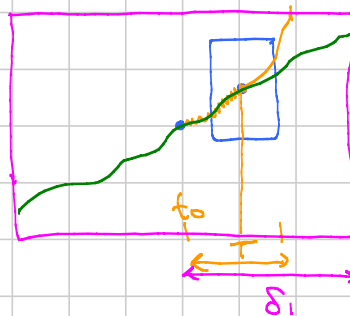
Considero

$(\delta_1 \leq \delta, M\delta_1 \leq n)$

$$\sup \{ T \in [t_0, t_0 + \delta_2] : u(t) = v(t) \text{ in } [t_0, T] \}$$

Se $T = \delta_2$, allora coincidono sempre. Altrimenti

Per la dimostrazione brutale di sopra, la soluz. è localmente unica, cioè esiste un rettangolo centrato in $(T, u(T)) = (T, v(T))$ in cui le due soluzioni coincidono ancora.



Questo contraddice la massimalità di T . Questo dice anche che

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_2]$$

LEMMA GRONWALL

(Minimalista)

Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $L \geq 0$ e sia $w: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

- (i) w è continua
- (ii) w soddisfa

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Allora

$$w(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Dim. 1

Moltiplico l'ipotesi a dx esso per $e^{-L(t-t_0)}$ e porto tutto al LHS

$$w(t) e^{-L(t-t_0)} - L e^{-L(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds \leq 0$$

$$\left[e^{-L(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds \right]' \leq 0$$

Quindi

$$e^{-L(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds \leq e^{-L(t_0-t_0)} \int_{t_0}^{t_0} w(s) ds$$

Da questo deduco che

$$\forall t \geq t_0$$

$$\int_{t_0}^t w(s) ds \leq 0 \quad \text{e quindi tornando nell'ipotesi}$$

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds \leq 0.$$

— o — o —

Dim. unicità

Supponiamo di avere due soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ del pbm. di Cauchy definite su un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Allora abbiamo 2 solus. dell'eq. di Volterra

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

Sottraggo e metto i valori assoluti

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \end{aligned}$$

Ponendo $w(t) := |u(t) - v(t)|$ posso applicare Gronwall e ottenere che

ovvia

Lemma

$$0 \leq w(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

$\Rightarrow$ finché esistono entrambe coincidono!

— o — o —

Teorema di sola esistenza $\leadsto$ serie ASCOLI-ARZELÀ
 solo in Italia

Def. Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici.
 Sia $f_n: X \rightarrow Y$ una successione di funzioni.

Dico che le f_n sono EQUICONTINUE se

non dip. da n

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in X \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_{x_0}(\delta)$$

$$d_y(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon$$

Teorema (Esercizio - Heine Cantor per successioni)

Tutto come sopra + (X, d_x) compatto.

Allora le f_n sono EQUIUNIFORMEMENTE CONTINUE, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_{x_0}(\delta)$$

$$d_y(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon.$$

[Di solito si scrive: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in B_x(\delta)$

$$d_y(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon \quad]$$

Dim. C'è una dimostrazione via raggio magico (indagare...) ma la più comoda è per assurdo. Nego la tesi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in B_x(\delta) \quad d_y(f_n(x), f_n(y)) \geq \varepsilon_0$$

Ne la gioco con $\delta = \frac{1}{k}$ e ottengo x_k, n_k, y_k t.c.

$$d_x(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k} \quad \text{ma} \quad d_y(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(y_k)) \geq \varepsilon_0$$

A meno di sottosucc.

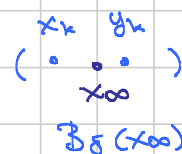
- $x_k \rightarrow x_\infty$
- $y_k \rightarrow x_\infty$ (sulla stessa sottosuccessione)
- n_k o sono costanti oppure $n_k \rightarrow +\infty$

Se gli n_k sono costanti, è la contraddizione classica di Heine-Cantor

Se $n_k \rightarrow +\infty$, mi basta dimostrare che le successioni $f_{n_k}(x_k)$ e $f_{n_k}(y_k)$ hanno lo stesso limite in y , arrivando a negare $d_Y \geq \varepsilon$.

Qui uso l'equicontinuità

Definitivamente x_k e y_k cascano in $B_\delta(x_\infty)$ dove il δ è quello che corrisponde a $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ ed x_∞ nella definizione di equicont.



$$\varepsilon_0 \leq d_Y(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(y_k)) \leq \underbrace{d_Y(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x_\infty))}_{\leq \frac{1}{3}\varepsilon_0} + \underbrace{d_Y(f_{n_k}(x_\infty), f_{n_k}(y_k))}_{\leq \frac{1}{3}\varepsilon_0}$$

Oss. Nella dim. non serve distinguere $n_k \rightarrow +\infty$ o n_k costante.

ANALISI

2

-

LEZIONE 106

Titolo nota

15/04/2016

Back to lezione precedente (in realtà è la 104: aggiunto dopo video)

SUBLEMMA Sia X un insieme, e sia $\varphi: X \rightarrow X$.

Sia n un intero tale che $\varphi^{(n)}: X \rightarrow X$ ha un **UNICO** p.to fisso x_0 .
 $\uparrow$ iterata n -esima

Allora x_0 è p.to fisso di φ . (ed è l'unica)

Dim. Per ipotesi $\varphi^{(n)}(x_0) = x_0$. Pongo $\varphi(x_0) = y_0$. Allora

$$\varphi^{(n)}(y_0) = \varphi^{(n)}(\varphi(x_0)) = \varphi(\varphi^{(n)}(x_0)) = \varphi(x_0) = y_0$$

$\uparrow$ Def y_0 $\uparrow$ $\varphi^{(n+1)}$ $\uparrow$ x_0 è fix per $\varphi^{(n)}$ $\uparrow$ Def y_0

Ma allora y_0 è fisso per $\varphi^{(n)}$, e quindi è proprio x_0 .
 — o — o —

Lemma (Proc. diag.: vedi les. su compattezza in sp. metrici)
 Dati sottoinsiemi

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$$

tutti **INFINITI**, allora esiste succ. n_k strett. cresc. f.c.

$$n_k \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[in particolare $n_i \in N_j$ per ogni $j \leq i$]

$\uparrow$ i-completa dopo video

— o — o —

TEOREMA DI ASCOLI-(ARZELÀ) (Versione in $\mathbb{R}$)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (estremi compresi), e sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che:

(i) f_n è EQUILIMITATA, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) f_n è EQUICONTINUA, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [a, b]$$

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Allora $\{f_n\}$ ammette una sottosucc. che converge uniforme, cioè esiste una succ. m_k di naturali strett. cresc., ed esiste $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_{m_k} \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } [a, b].$$

Dim. Fisso un sottoinsieme $D \subseteq [a, b]$ denso e numerabile

• Denso: $\forall t \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists d \in D \text{ t.c. } |d - t| < \varepsilon$

• Numerabile $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$

Basta prendere $D := [a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Passo 1 Esiste succ. strett. cresc. $\{m_k\} \subseteq \mathbb{N}$ ed esiste $f_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k}(d) = f_\infty(d) \quad \forall d \in D.$$

(Convergenza puntuale in D)

Prendo d_1 . Considero $\{f_m(d_1)\}$. Per equicontinuità è una succ. in $[-M, M]$, quindi ha una sottosucc. convergente

$$f_{n_{1,k}}(d_1) \rightarrow f_\infty(d_1)$$

N_1 = indici della prima s. succ.

Prendo d_2 , considero $\{f_{n_{1,k}}(d_2)\}$ e questa avrà una nuova sottosucc.

$$f_{n_{2,k}}(d_2) \rightarrow f_\infty(d_2)$$

N_2 = indici della seconda s. succ.

Prendo $d_3 \dots$

$$f_{n_{3,k}}(d_3) \rightarrow f_\infty(d_3)$$

N_3 = indici della terza

La sottosucc. diagonale $f_{m_{k,k}}$ li acccontenta tutti, cioè

$$f_{m_{k,k}}(d_i) \rightarrow f_\infty(d_i) \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Riassumendo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N_0
	1	2	3		5	6		8		10	11	12	N_1
		1	3		5	6					11	12	N_2
			3			6					11	12	N_3

Passo 2 Posso estendere f_∞ ad una funzione

$$f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

e avviene ancora che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k}(t) = f_\infty(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

(Convergenza puntuale su $[a, b]$ usando LA STESSA m_k che andava bene al passo 1).

Considero un qualunque $t \in [a, b]$. Voglio dimostrare che $\{f_{n_k}(t)\}$ è di Cauchy. Se ci riesco avrò un limite che chiamo $f_\infty(t)$.

Idea: $|f_{n_k}(t) - f_{n_l}(t)| \leq |f_{n_k}(t) - f_{n_k}(d)| + \leftarrow \text{piccoli se } t \text{ e } d \text{ sono vicini}$
 $\rightarrow + |f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| +$
 $+ |f_{n_l}(d) - f_{n_l}(t)| \leftarrow$
piccolo se l e k sono grandi

Formalmente

- 1 - mi sono dati $\varepsilon > 0$ e $t \in [a, b]$
- 2 - scelgo il $\delta > 0$ che corrisponde a $\frac{1}{3}\varepsilon$ nella definizione di equicontinuità
- 3 - scelgo $d \in D$ tale che $|t - d| \leq \delta$ (posso per densità)
- 4 - scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $|f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall l \geq k_0$
 (posso perché $\{f_{n_k}(d)\}$ è di Cauchy).

Ora per $l \geq k_0$ e $k \geq k_0$ le 3 righe della stima di sopra sono $\leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Sommando ottengo

$$|f_{n_k}(t) - f_{n_l}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall l \geq k_0.$$

Passo 3 La f_∞ è continua in $[a, b]$. (Per il momento è solo limite puntuale) Dico di più f_∞ ha la stessa relazione ε, δ della equicontinuità.

In fatti, fissato $t_0 \in [a, b]$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{n_k}(t) - f_{n_k}(t_0)| \leq \varepsilon \quad \forall k$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$|f_\infty(t) - f_\infty(t_0)| \leq \varepsilon$$

(ho usato solo la conv. puntuale)

ANALISI 2

—

LEZIONE 107

Titolo nota

15/04/2016

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ METRICO

Sia (X, d_X) uno sp. metrico COMPATTO.

Sia (Y, d_Y) uno sp. metrico (non serve nulla, nemmeno completo)

Sia $f_n: X \rightarrow Y$ una suce. di funzioni.

Supponiamo che

(i) (COMPATTEZZA A t FISSO) Per ogni $t \in X$ la successione $\{f_n(t)\} \subseteq Y$ è relativamente compatta, cioè

$$\forall t \in X \quad \exists K \subseteq Y \text{ compatto t.c. } f_n(t) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$
può dipendere da t

(ii) f_n è equicontinua nel solito senso.

Allora esiste $\{m_k\} \subseteq \mathbb{N}$ strett. cresc. ed esiste $f_\infty: X \rightarrow Y$ t.c.

$$f_{m_k} \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. su } X.$$

Dim. Prendo $D \subseteq X$ denso e numerabile.

Facile: fisso una 1-rete : # finito di pti

fisso una $\frac{1}{2}$ -rete : "

fisso una $\frac{1}{4}$ -rete : ...

I metrici
compatti soddi-
sfano il primo
assioma di
numerabilità

Prendo l'unione di tutte queste

Passo 1 Convergenza puntuale in D . Si fa come prima usando la compattezza a t fisso

Passo 2 Convergenza puntuale in X della stessa sottosucc.

Come prima mostro che $\forall t \in X$ la succ. $\{f_{n_k}(t)\}$ è di Cauchy in Y . Per l'ipotesi (i) so che questa ha una s.succ. convergente. Ma essendo di Cauchy converge tutta quanta, e quindi non mi servono ulteriori sottosucc.

Passo 3 Continuità di f_∞ : stessa dim. di prima

Passo 4 Convergenza unif.: come prima sfruttando di nuovo la compattezza di X .

Variante $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ equiuniforme ed equicontinua
 la limitatezza può anche dipendere dal p.to

Allora esiste una s.succ. $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti

Dim

- Esiste s.succ. che conv. unif. su $[-1, 1]$
- Esiste s.succ. DELLA PRECEDENTE che conv. unif. su $[-2, 2]$
- $\vdots$
- stessa cosa su $[-k, k]$

Concludo con un PROCEDIMENTO DIAGONALE.

Oss. lo stesso vale in un contesto metrico se assumo che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{compatti} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(ESAUSTIONE DI} \\ \text{COMPATTI)} \end{array}$$

TEOREMA DI PEANO (Teorema di sola esistenza per pbm. di Cauchy per $u' = f(t, u)$ con f solo continua)

- Dimostrazioni
- ① Punto fisso di SCHAUDER (richiede p.to fisso di BROWER che a sua volta richiede omologia / coomologia)
 - ② Problemi approssimanti
 - 2.1 $\rightarrow$ Approx Lipschitz
 - 2.2 $\rightarrow$ Approx Tonelli
 - 2.3 $\rightarrow$ Approx Eulero esplicita

Lemma misterioso Siano $t_0, u_0, \delta, r, M, R$ come sempre.

Sia $f : R \rightarrow [-M, M]$ continua.

Allora esiste una successione

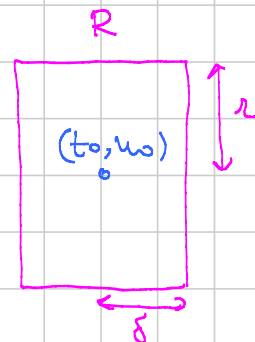
$$f_n : R \rightarrow [-M, M]$$

tale che

$$(i) f_n \rightarrow f \text{ unif. su } R$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{N} \exists L_n \text{ (dipendente da } n) \text{ t.c.}$$

$$|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)| \leq L_n |u_1 - u_2| \quad \forall t, u_1, u_2 \in \dots$$



Dim. di Peano dato il lemma Invece di risolvere

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

risolvo

$$\begin{cases} u' = f_n(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Ciascuno dei problemi approx. ha soluzione (pure unica)

$$u_n : [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$$

$$\text{con } \delta_1 \leq \delta \quad M \delta_1 \leq r$$

La cosa decisiva è che δ_1 NON DIPENDE da n , avendo usato la versione di Cauchy-lip. con tempo di vita δ_1 ottimale, cioè involip. dalla costante L .

Dico che le $\{u_n(t)\}$ verificano le ipotesi di A.A.

(i) sono equilimitate perché hanno valori su $[u_0-2, u_0+2]$

(ii) sono equicontinue perché sono equilipschitz in quanto

$$|u_n'(t)| = |f_n(t, u_n(t))| \leq M$$

$\uparrow$ indipendente da n

Per A.A. esiste s.succ. che non rinviava t.c.

$$u_n(t) \rightarrow u_\infty(t) \quad \text{unif.}$$

Dico che $u_\infty(t)$ risolve il pbm. limite. Per questo uso la formulazione integrale

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, u_n(s)) ds$$

$\downarrow$ $\downarrow \leftarrow$ Hope...

$$u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds$$

Per passare al limite nell'integrale serve la conv. unif. delle integrande, la quale segue dal fatto generale

$f_n \rightarrow f$ unif. in R + $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0+\delta_1]$, allora

$$f_n(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u_\infty(s)) \quad \text{unif. in } [t_0, t_0+\delta_1].$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 108

Titolo nota

19/04/2016

Dim. teo. esistenza e unicità:

- | | | |
|---------------------------------|---|---------------------------------|
| ① Contrazioni classica | $\dots \delta_1 L < 1$
tempo di vita δ_1
non dipende da
cost. Lip | Basate su
COMPLETEZZA |
| ② Contrazioni con dist. pesata | | |
| ③ Iterate di Picard | | |
| ④ m-esima iterata è contrazione | | |

Dim. teo. sola esistenza:

- | | |
|----------------------------------|---|
| ① Schauder (non vedremo) | Basate su argomenti di
COMPATTEZZA
(Ascoli - Arzelà) |
| ② Approx. Lipschitz | |
| ③ Approx. Tonelli | |
| ④ Eulero esplicito (non vedremo) | |

Idea di ②: devo risolvere $u' = f(t, u)$ $u(t_0) = u_0$
 Approssimo f con funzioni f_n Lipschitz e risolvo
 $u' = f_n(t, u)$ $u(t_0) = u_0$
 $\leadsto$ Trovo soluzione (unica $u_n(t)$) e faccio vedere
 che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ a meno di sottosucc.
 e $u_\infty(t)$ risolve il pbm. vero

Oss. ① I problemi approx. hanno solus. con un tempo di vita
 COMUNE ($\delta_1 \leq \delta$, $M\delta_1 \leq 2$) grazie alle dim. del
 teo. esist. e unicità senza dip. da L .

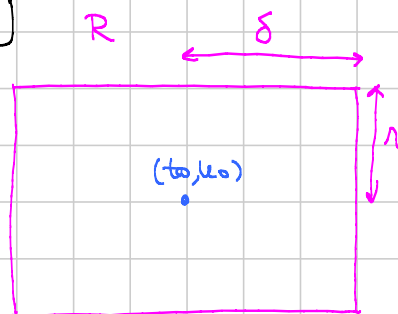
- ② L'unicità si perde nel momento in cui prendo le
 s.succ., cioè sottosucc. diverse di $u_n(t)$ potrebbero
 convergere a solus. $u_\infty(t)$ diverse del problema
 limite $u' = f(t, u)$ $u(t_0) = u_0$.

— o — o —

PROBLEMI APPROSSIMANTI ALLA TONELLI

$f(t, u)$ continua in R e $|f(t, u)| \leq M$

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Risolviamo
$$\begin{cases} u'_m(t) = f(t, u_m(t - \frac{1}{n})) \\ u(t) = u_0 \end{cases}$$

← sistema i tempi $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$

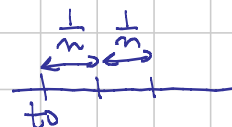
RITARDO

Idea: $u'_m(t)$ dipende dal valore di u_m in un tempo PRECEDENTE

Vantaggio: è molto facile dimostrare che il problema appross ha soluzione e tale soluzione è definita almeno per $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$ con $\delta_1 \leq \delta$ e $M\delta_1 \leq \eta$.

Dim. Per $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$ abbiamo $u'_m(t) = f(t, u_0)$, quindi basta integrare.

Per $t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n}]$ abbiamo



$$u'_m(t) = f(t, u_m(t - \frac{1}{n}))$$

intervallo precedente, quindi conosco già il valore, quindi basta integrare

E così via...

L'unica cosa che devo controllare è che $u_m(t) \in [u_0 - \eta, u_0 + \eta]$ ma questo segue da Lagrange

$$|u_m(t) - u_m(t_0)| = \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta_1} \cdot \underbrace{|u'_m(\xi)|}_{\leq M} \leq \delta_1 M \leq \eta.$$

perché è f (qualcosa)

Oss. Le $u_n(t)$ sono C^1 perché sono C^0 tratto per tratto e continue negli estremi $t_0 + \frac{k}{n}$, ma a quel punto $u'_n(t) \in C^0$, quindi u_n è C^1 .

Ora bisogna passare al limite con A.A.

(i) c'è equiboundedness $u_n(t) \in [u_0 - 2, u_0 + 2]$

(ii) c'è equilipschitzianità $|u'_n(t)| \leq M$

L'intervallo di definizione è $[t_0, t_0 + \delta_1]$, quindi comune.

A.A. $\Rightarrow$ a meno di s.succ. $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif.

Resta da dim. che $u_\infty(t)$ risolve il pbm. limite.

Basta passare al limite nella formulazione integrale

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s - \frac{1}{n})) ds$$

$\downarrow$ $\downarrow$ sense conv. unif. delle integrande

$$u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds$$

Qui mi serve che $f(s, u_n(s - \frac{1}{n})) \rightarrow f(s, u_\infty(s))$ unif.

Basta spezzare il problema in 2:

$\rightarrow$ se $u_n(s) \rightarrow u_\infty(s)$ unif., allora $u_n(s - \frac{1}{n}) \rightarrow u_\infty(s)$ unif.

$$|u_\infty(s) - u_n(s - \frac{1}{n})| \leq |u_\infty(s) - u_\infty(s - \frac{1}{n})| + |u_\infty(s - \frac{1}{n}) - u_n(s - \frac{1}{n})|$$

piccolo per lip. di u_∞
piccolo per conv. unif.

$\rightarrow$ se $v_n(s) \rightarrow v_\infty(s)$ unif., allora $f(s, v_n(s)) \rightarrow f(s, v_\infty(s))$ unif.

Oss. Una volta che ho la cov. unif. posso passare al limite anche nella formulaz. diff. senza passare a quella integrale

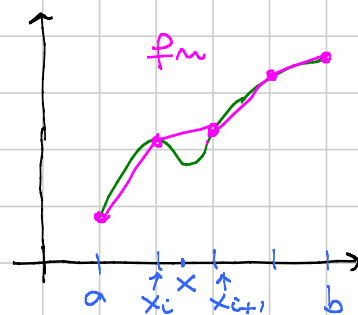
$$\lim_1'(t) = f(t, \lim(t - \frac{1}{n}))$$

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Deriv. conv. unif. ovunque} \\ \rightarrow \text{Funzioni conv. in un pto} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{derivate convergono alle} \\ \text{derivate.} \end{array}$

Prop. (esercizio) Sia $f: [a, b] \rightarrow [-M, M]$ continua.
Allora esiste una succ. $f_n: [a, b] \rightarrow [-M, M]$ lip. t.c.

$$f_n \rightarrow f \text{ unif.}$$

Dim. 1 Fisso n , diviso $[a, b]$ in n pezzi uguali e prendo la affine a tratti che interpola



È evidente che è lip. Resta da dim. la
cons. unif. che segue dalla unif. continuità di $f(x)$

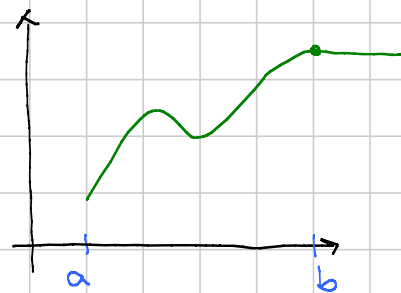
$$|f(x) - f_n(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{\substack{\text{piccolo se } x \text{ e } x_i \\ \text{sono vicini}}} + \underbrace{|f(x_i) - f_n(x_i)|}_0 + \underbrace{|f_n(x_i) - f_n(x)|}_{\text{come il primo}}$$

Esercizio: sistemare i dettagli

Dim 2 Estendo f oltre b mettendola costante. Definisco

$$f_{\varepsilon}(x) := \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy$$

media di f tra x e $x+\varepsilon$



Dico che $f_\varepsilon(x)$ è Lipschitziana, anzi C^1 . Infatti

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} [f(x+\varepsilon) - f(x)], \text{ quindi } |f'_\varepsilon(x)| \leq \frac{2M}{\varepsilon}$$

È ovvio che $f_\varepsilon(x) \in [-M, M]$ (proprietà degli integrali)

Dico che $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ unif.

La conv. puntuale è il teo. fond. del calcolo integrale.

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \underbrace{[f(y) - f(x)]}_{\substack{\text{se } \varepsilon \text{ è abbastanza piccolo,} \\ \text{questo è piccolo unif. in } x}} dy \right|$$

Mi è dato $\eta > 0$. Scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. (come se fosse $\delta \dots$)

$$|y - x| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \eta$$

a quel p.to

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{\leq \eta} dy \leq \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \eta = \eta.$$

— o — o —

Oss. In 2 variabili (o in n variabili) posso fare la scelta su un quadrato (o cubo)



ANALISI 2 - LEZIONE 109

Titolo nota

19/04/2016

Teo. di esistenza globale e alternativa

Teo. di esistenza globale 1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, localmente lip. nella seconda variabile (ma non serve davvero) e globalmente limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

Allora per ogni (t_0, u_0) il pbm. di Cauchy

$$u' = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

ha soluzione globale $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (unica se c'è lip. loc.)

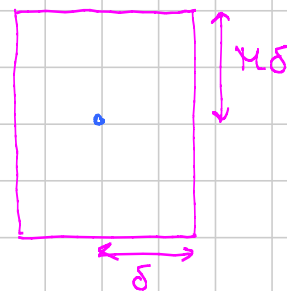
Dim. Basta dimostrare che per ogni $\delta > 0$ c'è una soluzione definita in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Per unicità queste soluzioni si ricolcano tra di loro.

Basta considerare $r := M\delta$ e applicare il teo. di esistenza locale in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - r, u_0 + r]$

Trovo una soluzione definita in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ purché

$$\begin{aligned} \delta_1 &\leq \delta \\ M\delta_1 &\leq r \end{aligned} \quad \leadsto \text{ posso prendere } \delta_1 = \delta !!!$$

Occhio δ_1 non dipende dalla cost. di lip.



Oss. Ho usato la lip. solo per ricolcare le soluzioni. Altrimenti le soluz. con δ diversi potrebbero essere diverse.

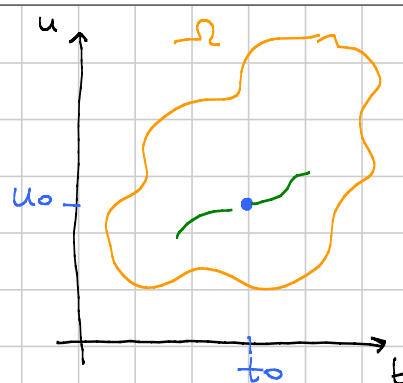
TEO. ALTERNATIVA

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua

(ii) f loc. dip. nella 2ª variabile (ma non
senza davvero)



Sia $(t_0, u_0) \in \Omega$ e sia u una soluz. locale del pbm. di Cauchy

$$u' = f(t, u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

Allora la soluzione u può essere prolungata ad un int. massimale (nel futuro) $[t_0, T)$

e vale almeno una delle seguenti 3 opzioni

① $T = +\infty$ (esistenza globale)

② $\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (blow up)

③ $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \Omega^c) = 0$ (break down)

↑
il grafico esce
da Ω .

↑
p.to sul
grafico

↑
complementare di Ω
 $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ (chiuso)

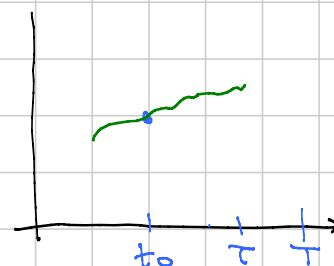
Un discorso analogo vale nel passato

Dim. Prolungamento Come prolungo una soluzione?

Considero $T := \sup \{ \tau \geq t_0 : \text{esiste una soluzione definita in } [t_0, \tau] \}$

↑
non vuoto per teo.
di esistenza locale

Se posso riincollare queste soluzioni ottengo una sol. definita in tutto $[t_0, T)$



Oss. Se non voglio usare l'unicità solo costruito ad usare Zorn. Dico che una solus. è "maggiore di un'altra" se

- ha tempo di vita più lungo
- coincide nell'intervallo comune.

È un ordine parziale e tutte le catene hanno elem. max.

⇒ esiste un elemento massimale generale, cioè una soluzione non prolungabile.

Cosa può succedere in T ?

Supponiamo di avere una solus. in $[t_0, T)$ non ulteriormente prolungabile. Allora valgono ①, ② oppure ③.

Infatti, supponiamo per assurdo che non valgano.

Allora esistono due costanti $A > 0$ e $B > 0$

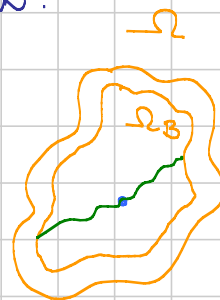
tali che

$$|u(t)| \leq A \quad \forall t \in [t_0, T)$$

Potrebbe $\Omega_B = \{ (t, u) \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}((t, u), \Omega^c) \geq B \}$

valere

$$(t, u(t)) \in \Omega_B \quad \forall t \in [t_0, T)$$



(in altri termini: la soluzione sta in un insieme limitato e ben lontano da $\partial\Omega$)

Ora

$$\{ (t, u) : |u| \leq A, (t, u) \in \Omega_B, t \in [t_0, T] \}$$

è compatto perché è chiuso e limitato, quindi $|f(t, u)|$ ammette un massimo M in quell'insieme.

Ma allora $u(t)$ è lip. in $[t_0, T)$ perché $|u'(t)| \leq M$

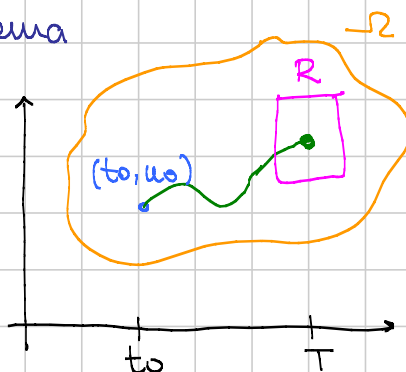
Ma allora $u(t)$ è unif. cont. in $[t_0, T)$, quindi estendibile fino a T , cioè esiste

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = L$$

Ora posso ripartire risolvendo il problema

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t) = L \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza applicato in un rettangolo centrato in (T, L) posso prolungare la soluzione in $[T, T+\delta]$ e questo contraddice l'ipotesi di non prolungabilità.



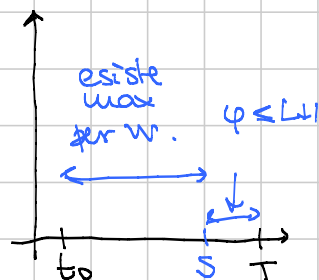
Dettagli: ① perché $|u(t)| \leq A$ per ogni $t \in [t_0, T)$.

Considero la funzione

$$\varphi(t) := |u(t)|$$

è continua e ha limsup finito per $t \rightarrow T^-$, quindi è limitata superiormente.

Detto $L = \limsup$, in un intorno sx di T vale $\varphi(t) \leq L+1$



② Perché $(t, u(t)) \in \Omega_B$ per un certo $B > 0$?

Considero la funzione

$$\psi(t) := \text{dist}((t, u(t)), \Omega^c)$$

È continua perché composizione di funzioni continue

(Fatto generale: (X, d) metrico, $A \subseteq X$ sottocsieme $\neq \emptyset$, allora

$$\varphi(x) = \text{dist}(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

è una funzione 1-Lip., quindi continua. Inoltre

A è chiuso $\Leftrightarrow A = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$

Conclusione $\psi(t)$ è continua in $[t_0, T)$ e $\psi(t) > 0$
per ogni $t \in [t_0, T)$

Essendo poi $\liminf_{t \rightarrow T^-} \psi(t) > 0$ posso concludere (solito uso)
che

$$\inf \{ \psi(t) : t \in [t_0, T) \} = B > 0.$$

ANALISI 2

LEZIONE 110

Titolo nota

20/04/2016

STUDIO QUALITATIVO DI EQ. DIFF.

Strumenti : $\rightarrow$ tes. dell'asintoto
 $\rightarrow$ Sopra / sotto soluzioni
 $\rightarrow$ tes. di esistenza glob. / blow up

Tes. dell'asintoto Sia $A \in \mathbb{R}$ e sia $u: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 .

Supponiamo che

(i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \in \mathbb{R},$

(ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$ esiste in $\overline{\mathbb{R}}.$

Allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0.$

- Oss. ① Vale un enunciato analogo per $t \rightarrow -\infty$
 ② Altro modo equiv. di enunciazione

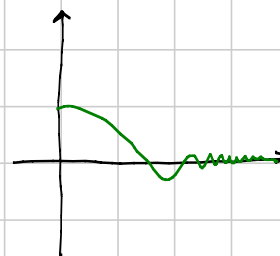
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \begin{matrix} \nearrow \text{N.E.} \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

- ③ Può succedere che $u'(t)$ non ha limite, ad esempio

$$u(t) = \frac{\sin(t^2)}{t} \quad u(t) \rightarrow 0$$

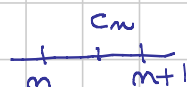
$$u'(t) = \frac{\cancel{2} \cos(t^2)}{\cancel{t}} - \frac{\sin(t^2)}{t^2}$$

$\downarrow$ Non ha lim. $\downarrow$ 0



Dim. Per Lagrange $u(n+1) - u(n) = 1 \cdot u'(c_n)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ l & - & l \\ \in \mathbb{R} & & \in \mathbb{R} \end{array}$$



Ora $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'(c_n) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = l - l = 0$

↑
qui serve che u' ha
limite
— 0 —

Oss. ④ Enunciato più completo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$$

— 0 — 0 —

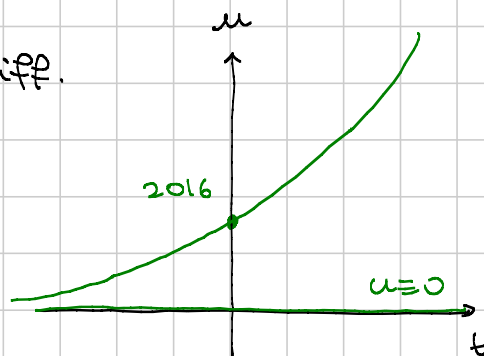
Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 2016 \end{cases}$ Capire la soluzione senza risolvere

Fatto 1 Il pbm. ha sol. glob. unica (infatti $f(t, u)$ è glob. limitata e loc. lip. in u)

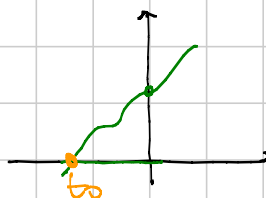
Fatto 2 $u(t) \equiv 0$ è soluz. dell'eq. diff.

Fatto 3 $u(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se diventasse ≤ 0 da qualche parte, dovrebbe passare da 0, e lì ci sarebbe una violazione di unicità



Fatto 4 u è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$



$$u' = \arctan \underbrace{u}_{>0} > 0$$

Fatto 5 Per monotonia $u(t)$ ha limite per $t \rightarrow \pm\infty$.

Per $t \rightarrow -\infty$ sappiamo che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$.

Per l'equaz.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan u(t) = \arctan l$$

quindi $u'(t)$ ha limite. Tes. asintoto $\Rightarrow u'(t) \rightarrow 0$
cioè $\arctan l = 0$, cioè $l = 0$.

Per $t \rightarrow +\infty$ sappiamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in [2016, +\infty]$

Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora come prima ^{compreso}

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \arctan l, \text{ ma per il tes. asintoto dovrebbe}$$

essere $l = 0$, che è impossibile perché $l \geq 2016$.

Quindi resta solo $l = +\infty$.

Fatto 6 $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ (bootstrap)

Fatto 7 Sembra essere convessa... $u' = \arctan u$

$$u'' = (\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} u' = \frac{\arctan u}{1+u^2} > 0 \text{ sempre } \text{😊}$$

Fatto 8 Sembra che $u(t) \sim \frac{\pi}{2} t$ per $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

$\uparrow$
Höp ($\frac{\infty}{\infty}$)

Fatto 8.5 Ci sarà l'asintoto obliquo a $+\infty$?

Fatto 9 Sembra che $u(t) \sim k e^t$ per $t \rightarrow -\infty$

Brutale! $u' = \arctan u \sim u$
 $\uparrow$
 per $u \sim 0$

$u' = u$ ha come soluz.
 $u(t) = k e^t$

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log u(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u'(t)}{u(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\arctan u(t)}{u(t)} = 1 \end{aligned}$$

$\uparrow$
solito limite notevole

Fatto 10 Per l'asintoto obliquo servirebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(u(t) - \frac{\pi}{2} t \right)}_{v(t)} \in \mathbb{R} \quad \text{Come lo dimostro?}$$

$$v'(t) = u'(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan u(t) - \frac{\pi}{2} < 0$$

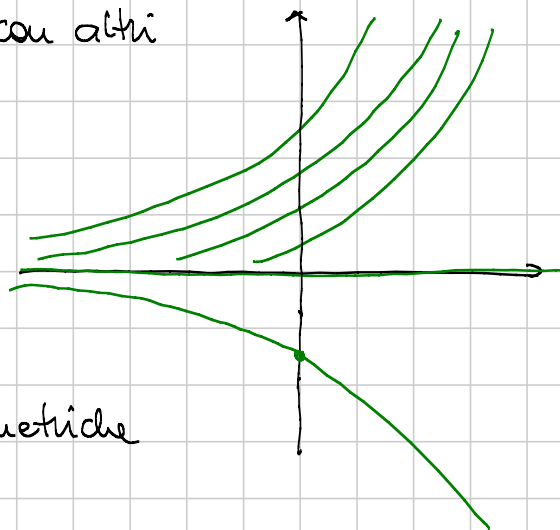
$$\Rightarrow v(t) \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Mi basterebbe sapere che $v(t)$ è limitata dal basso, ma questo (per ora) non è chiaro.

Fatto 11 Come sono fatte le soluz. con altri dati iniziali?

Le soluzioni con $u(0) > 0$ sono tutte traslate dx - sx di quella di prima (proprietà delle eq. autonome)

Quelle con $u(0) < 0$ sono le simmetriche delle altre risp. all'asse x



Detto bene: se $u(t)$ è una soluzione, allora $-u(t)$ è solus.

Pongo $v(t) = -u(t)$ e vedo cosa risolve.

$$v'(t) = -u'(t) = -\arctan u(t) = \arctan(-u(t)) = \arctan v(t)$$

$\arctan$ è dispari

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Fatto ①: $u(t) \equiv 0$ sono
 $u(t) \equiv \pi$ soluzioni

Fatto ② $0 < u(t) < \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Fatto ③ La soluzione esiste unica globale

Fatto ④ $u'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Fatto ④ $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$

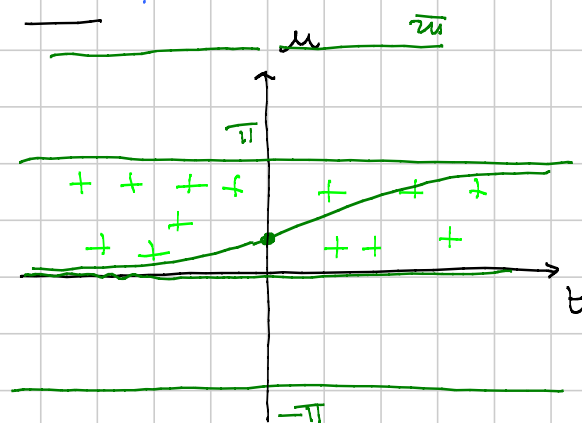
$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$

Per $t \rightarrow +\infty$ abbiamo $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$ esiste ed è $l \in [0, \pi]$.

Per l'equazione $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin u(t) = \sin l$
quindi esiste

Teo. azimut. $\Rightarrow \sin l = 0$ e l'unica possibilità in $[0, \pi]$ è $l = \pi$.

Discorso analogo a $-\infty$



Fatto ⑤ La convessità cambia quando attraverso $\frac{\pi}{2}$

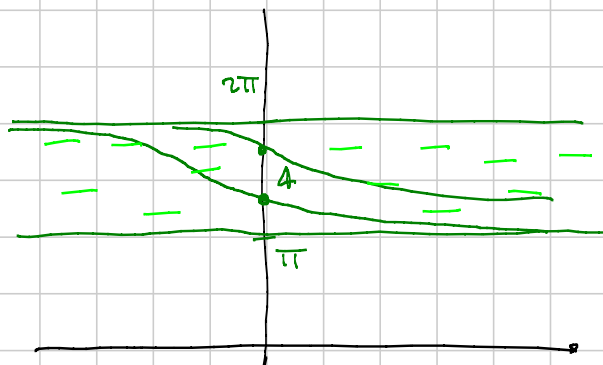
$$u'' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos u \cdot \sin u$$

$\downarrow$
 > 0 sempre
 < 0 per $u \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
 > 0 per $u \in (0, \frac{\pi}{2})$

Fatto ⑥ Se avessimo avuto

$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = 4 \end{cases}$$

Tutti gli asintoti è
ragionevole che siano
presi esponenzialmente.



ANALISI 2

LEZIONE 111

Titolo nota

20/04/2016

SOPRASOLUZIONI E SOTTOSOLUZIONI

Consideriamo un'eq. diff. $u' = f(t, u)$

Def. Si dice che $v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è sottosoluzione se

$$v'(t) \leq f(t, v(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

Si dice sottosoluzione stretta se vale con $<$ stretto.

Si dice che v è soprasoluzione se vale la stessa cosa con $\geq$ ($>$).

Teorema Supponiamo che $f(t, u)$ sia continua nelle due variabili.

Sia $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una soprasoluzione

Sia $v: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una sottosoluzione

Supponiamo che

(i) una delle 2 sia stretta (basta che per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ almeno una delle 2 disug. sia stretta)

(ii) $u(t_0) > v(t_0)$

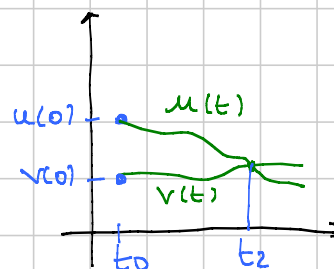
Allora

$$u(t) > v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

Dim. Supponiamo wlog
 $u'(t) > f(t, u(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$
 $v'(t) \leq f(t, v(t)) \quad "$

Ragioniamo per assurdo supponendo che

$$\exists t_1 \in [t_0, t_0 + \delta) \text{ t.c. } u(t_1) \leq v(t_1)$$



Pongo

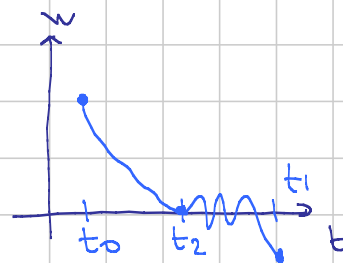
$$t_2 := \sup \{ t \in [t_0, t_0 + \delta) : u(t) \leq v(t) \} = \sup \text{degli zeri}$$

contiene t_1 , quindi $\neq \emptyset$

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$.

Osservo che w è continua e $w(t_2) = 0$
(come nel teorema di esistenza degli zeri).

Inoltre $t_2 > t_0$ per continuità



Idea: dal disegno $w'(t_2) \leq 0$, ma d'altra parte

$$w'(t_2) = u'(t_2) - v'(t_2) > 0$$

$$> f(t_2, u(t_2)) \geq -f(t_2, v(t_2))$$

Questi sono uguali perché $w(t_2) = u(t_2) - v(t_2) = 0$

L'unica cosa da giustificare è $w'(t_2) \leq 0$, ma è analisi 1:

$$w'(t_2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{w(t_2 + h) - w(t_2)}{h} \leq 0 \quad \text{perché limite di roba negativa.}$$

(2) neg

Oss. 1 Basta supporre in realtà che $u(0) \geq v(0)$.

Consideriamo come prima la differenza $w(t) := u(t) - v(t)$

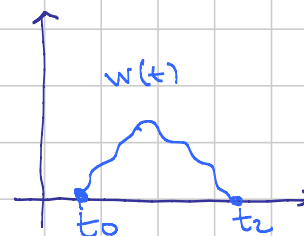
Ora se c'è > 0 è come prima.

Se c'è $w(t_0) = 0$, allora $u(t_0) = v(t_0)$
quindi

$$w'(t_0) = u'(t_0) - v'(t_0)$$

$$> f(t_0, u(t_0)) - f(t_0, v(t_0)) = 0 \quad \text{e questo garantisce che } w(t) > 0 \text{ un po' a dx di } t_0$$

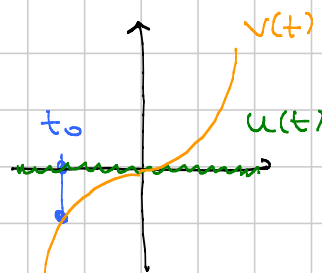
uguali



Oss.2 Se tolgo che una delle 2 sia stretta può saltare tutto anche se $u(0) > v(0)$.

Basta pensare al solito esempio di non unicità

$$u' = 3|u|^{2/3}$$



Teorema Se in aggiunta ho che $f(t, u)$ è come nel teo. di esistenza ed unicità, allora bastano $\geq$ e $\leq$ (non serve che nessuna sia stretta)

Teorema (Esistenza globale nel caso sublineare)

Supponiamo che $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che esistano due funzioni $A(t)$ e $B(t)$ continue tali che

$$|f(t, u)| \leq A(t) + B(t)|u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

(cioè f non cresce troppo nella variabile u)

Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ la soluz. è globale.

Via canonica per costruire sopra / sottosoluzioni

Supponiamo che $f(t, u) < g(t, u) \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$

Risolvo $u' = f(t, u) \quad v' = g(t, v)$

Allora v è soprasoluzione stretta della prima equazione

Dim. $v'(t) = g(t, v(t)) > f(t, v(t))$

Aggiunto dopo video: la dim. non funziona. Rifatta meglio alla lezione 114.

Dim. teo sopra

$$f(t, u) < \underbrace{A(t) + B(t)u + 1}_{g(t, u)} \quad \text{per } u > 0$$

no. non posso
togliere il valore
assoluto dopo video

Risolvo $v' = g(t, v) = B(t)v + A(t) + 1$

Questo lo so risolvere dall'analisi 1 (fattore integrante, ecc...) e scopro che ha soluz. globale.

Ma allora v è sottosoluz. dell'eq. con la f e ha esistenza globale $\Rightarrow u$ non può avere blow up a $+\infty$ per tempi positivi.

La stessa cosa la faccio a partire da

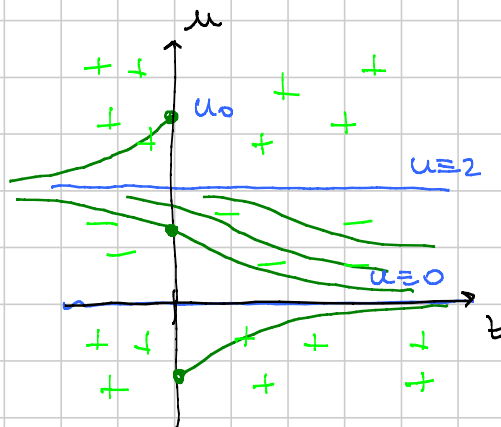
$$f(t, u) > -A(t) - B(t)u - 1$$

che vale per $u < 0$.

Da qui tu poi ok

Esempio $u' = u^2 - 2u$

Se parto con $u(0) > 2$, alla fine è come fosse $u' = u^2$ e queste hanno blow-up. Come lo dimostro?



Analisi 1 $\Rightarrow \exists c > 0$ t.c. $\underbrace{u^2 - 2u}_{f(t, u)} \geq \underbrace{cu^2}_{g(t, u)} \quad \forall u \geq u_0$

È come dire che $1 - \frac{2}{u} \geq c > 0 \quad (c = 1 - \frac{2}{u_0} > 0)$

Le soluzioni di $v' = cv^2$ sono sottosoluzioni di $u' = u^2 - 2u$

Ma le soluzioni di $v' = cv^2$ hanno tutte blow up se hanno dato $v(0) > 0$.

$$\begin{cases} u' = u^2 - 2u \\ u(0) = 4 \end{cases} \quad \text{In un angolo calcolo } C = \frac{1}{2}$$

Risolvere $\begin{cases} v' = \frac{1}{2} v^2 \\ v(0) = 4 \end{cases}$

$$\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{2} \leadsto -\frac{1}{v} = \frac{t}{2} + C$$

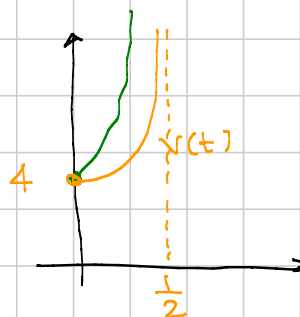
BRUTTA
COPIA

$$v(t) = \frac{2}{C - t}$$

$$v(t) = \frac{4}{1 - 2t}$$

Considero $v(t) := \frac{4}{1-2t}$. Verifico che $v' = v^2 - 2v$

Faccio il conto...



ANALISI 2

-

LEZIONE 112

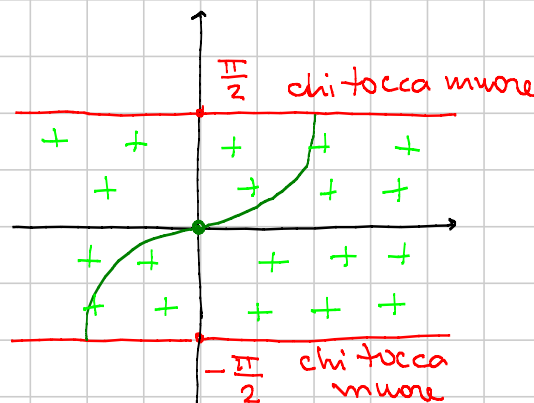
Titolo nota

21/04/2016

$$u' = f(u) \quad \text{AUTONOMI}$$

Esempio 1 $u' = \frac{1}{\cos u}$ $u(0) = 0$

$f(u)$



Fatto 1 C'è esistenza e unicità locale perché $f(u)$ è lip. in un intorno di 0.

Fatto 2 Ci sono problemi se $u = \pm \frac{\pi}{2}$ (e non solo)

Fatto 3 $-\frac{\pi}{2} < u(t) < \frac{\pi}{2}$ finché la soluzione esiste, quindi $u'(t) > 0$ finché esiste

Nel futuro: $u(t)$ può esistere globalmente e tendere a $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oppure avere break down

Fatto 4 Voglio dim. che c'è break down. Se ci fosse esistenza globale, avrei che $u(t) \rightarrow l$, ma allora

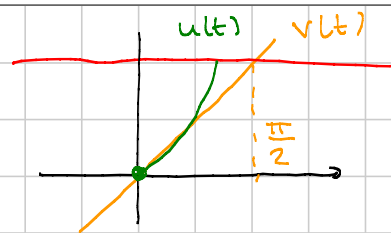
$$u'(t) = \frac{1}{\cos u(t)} \rightarrow \frac{1}{\cos l} \quad (\text{eventualmente } +\infty \text{ se } \cos l = 0)$$

Teo. asintoto $\Rightarrow \frac{1}{\cos l} = 0 \leadsto$ impossibile

Dim alternativa del break down $v(t) := t$. Dico che è una sottosoluzione

Davò verificare $v'(t) \leq \frac{1}{\cos v(t)}$

$$\stackrel{||}{=} 1 \leq \frac{1}{\cos t} \text{ ovvia}$$



Fatto 5 Per tempi negativi la situazione è simmetrica, anzi la soluzione è dispari

Infatti: se $u(t)$ è soluzione, allora $v(t) = -u(-t)$ è pure soluzione

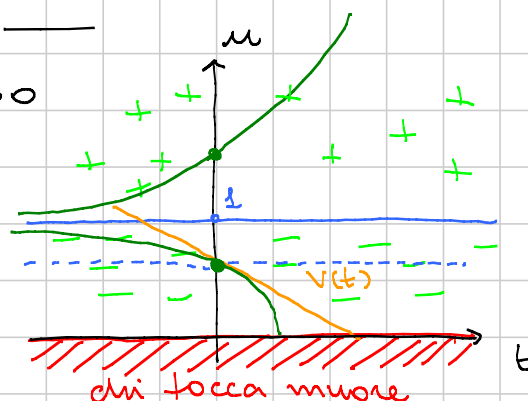
Dim. $v'(t) = u'(-t) = \frac{1}{\cos(u(-t))} = \frac{1}{\cos(-u(-t))} = \frac{1}{\cos v(t)}$
 $\uparrow$
 $\cos$ è pari

Quindi $v(t) = -u(-t)$ risolve la stessa eq. con lo stesso dato iniziale $\Rightarrow -u(-t) = u(t)$ per unicità.
 $\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$

Esempio 2 $u' = \log u$ $u(0) = \alpha > 0$

Fatto 1 $u(t) \equiv 1$ è soluzione

Fatto 2 Il segno di u' è come in figura



Fatto 3 Se $\alpha \in (0,1)$, allora

① per $t \leq 0$ si ha esistenza globale e $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 1^-$

② per $t \geq 0$ si ha break down

Dim ① Per $t \leq 0$ la soluzione $u(t) \in [\alpha, 1] \Rightarrow$ niente blow up e niente break down.

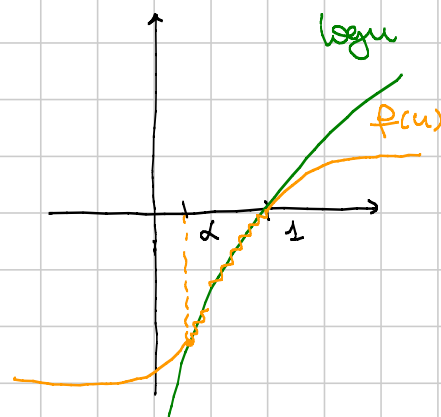
Altra idea: considero $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e lip. f.c.

$$f(u) = \log u \text{ per ogni } u \in [\alpha, 1]$$

Risolve $u' = f(u)$ e questo ha sol. glob. perché f è glob. lim.

Finché la solut. sta in $[\alpha, 1]$

risolvere $u' = \log u$ oppure $u' = f(u)$ è la stessa cosa.



Il limite si fa al solito modo: $u(t) \rightarrow l \in [\alpha, 1]$ per $t \rightarrow -\infty$ (per monotonia), ma allora $u' \rightarrow \log l$
 Teo. asintoto $\Rightarrow \log l = 0 \Rightarrow l = 1$.

Dim 2 Due vie

• se ci fosse esist. glob. $\Rightarrow u(t) \rightarrow l \in [0, \alpha] \Rightarrow u'(t) \rightarrow \log l \leadsto \log l = 0 \leadsto l = 1$, impossibile.

• sparo $v(t) := \alpha + \log \alpha \cdot t$ e dico che è sopra solut.

$$v(0) = \alpha = u(0)$$

$$v'(t) \stackrel{?}{\geq} \log v(t)$$

"

$$\log \alpha \stackrel{?}{\geq} \log(\alpha + \log \alpha \cdot t) \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha + \underbrace{\log \alpha}_{<0} \underbrace{t}_{>0}$$

Fatto 4 Per $\alpha > 1$ si ha

• per $t \leq 0$ esistenza globale con $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 1$ (solito)

• per $t \geq 0$ esistenza globale perché $f(u) \leq A + Bu$ per opportuni A e B

Volendo posso cercare una sopra soluzione $v(t) := \alpha e^t$

$$v(0) = \alpha = u(0)$$

$$(v(0) \geq u(0))$$

$$v'(t) \stackrel{?}{\geq} \log v(t)$$

$$\alpha e^t \stackrel{?}{\geq} \log \alpha e^t$$

$$\alpha e^t \stackrel{?}{\geq} t + \log \alpha \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

Sembra vero perché

$$\varphi(t) = \alpha e^t - t - \log \alpha \geq 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

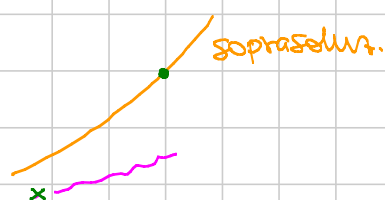
$$\varphi(0) = \alpha - \log \alpha > 0, \quad \varphi'(t) = \alpha e^t - 1 \geq \alpha - 1 > 0.$$

Oss. La soprasolus. impedisce il blow up $\Rightarrow$ esistenza glob.
— o — o —

Oss. Sopra e sotto solus. funzionano come uno si aspetta solo nel futuro.
Nel passato si gira tutto.

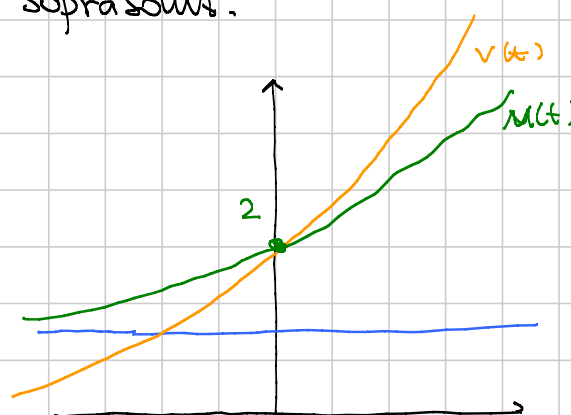
$$\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 2 \end{cases} \quad v(t) = 2e^t \text{ è soprasolus.}$$

Per $t \leq 0$ la soprasoluzione con la stessa partenza sta sotto



↑
se $u(t)$ arrivasse sotto $v(t)$ per un certo $t_0 < 0$, allora risalendo da t_0 in avanti e vedo che $u(t)$ dovrebbe stare sempre sotto (< stretto) da t_0 in poi.

— o — o —



Esempio 3 $u' = \frac{u^2 + 3u}{u - 2}$

Ci aspettiamo

- per $u(0) \in (0, 2)$
 $\rightarrow$ break down per $t \leq 0$
 $\rightarrow$ esist. glob. per $t \geq 0$
 con $u(t) \rightarrow 0$

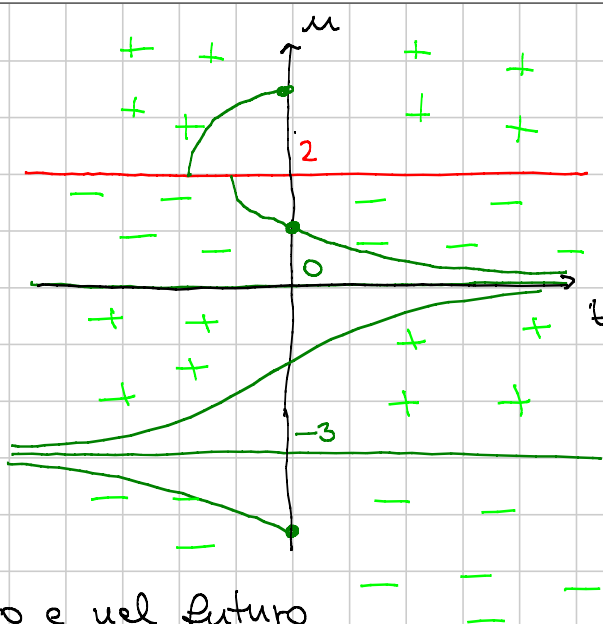
- per $u(0) \in (-3, 0)$
 esistenza globale nel passato e nel futuro
 con limiti 0 e -3.

- per $u(0) > 2$
 $\rightarrow$ break down per $t \leq 0$
 $\rightarrow$ esistenza globale per $t \geq 0$ in quanto $f(u) \leq A + Bu$
 per $u \geq 2$

- per $u(0) < -3$
 $\rightarrow$ esistenza globale per $t \leq 0$ con limite -3
 $\rightarrow$ esistenza globale per $t \geq 0$ con limite $-\infty$

$$|f(u)| \leq A + Bu \quad \text{per } u \leq -3$$

(f cresce linearmente per $u \rightarrow -\infty$ e per $u \rightarrow +\infty$)



ANALISI 2

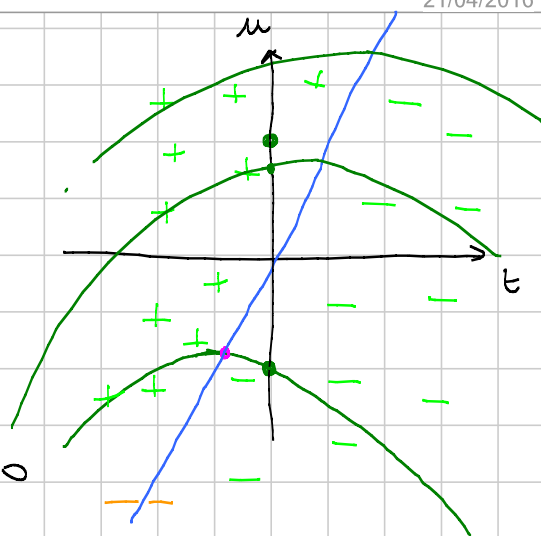
LEZIONE 113

Titolo nota

21/04/2016

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan(u-2t) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ c'è soluz.
globale unica
(RHS glob. limitato)



Fatto 2 $u' \geq 0 \Leftrightarrow \arctan(u-2t) \geq 0$
 $\Leftrightarrow u \geq 2t$

Fatto 3 $\alpha < 0$ e $t \geq 0$: esistenza globale con limite $-\infty$

Dim. $u(t) \rightarrow l \in [-\infty, \alpha]$ per monotonia
 $\uparrow$ compreso

se per assurdo fosse $l \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ e il teo. asintotico crea un assurdo.

Quindi $l = -\infty$.

Si vede che $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u(t)}{t} = -\frac{\pi}{2}$ (Hôpital)

Fatto 4 $\alpha < 0$ e $t \leq 0$: esistenza globale

Ad un certo pto tocca la retta $2t$ e poi se resta sopra tendendo comunque a $-\infty$.

Tende a $-\infty$ perché ha limite ed i limiti reali non sono compatibili con Teo. asintotico.

La funzione $v(t) = 2t$ è una soprasolus. (stretta)

$$\underset{2}{v'} \geq \underset{0}{\arctan(v-2t)}$$

quindi nel passato sta sotto le soluzioni

(semi-hard)

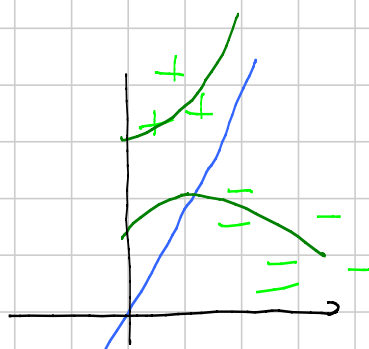
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

Fatto 5 $\alpha > 0$ e $t \leq 0$. Esistenza globale sopra la retta e limite $-\infty$

Fatto 6 $\alpha > 0$ e $t \geq 0$

Ci sono due opzioni

- tocca $u=2t$ e poi va giù
- non tocca mai e sta sempre sopra

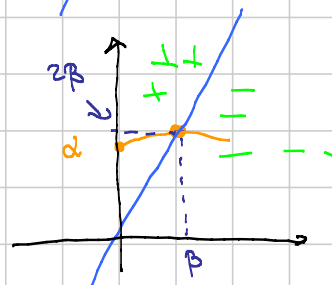


Fatto 7 $\exists \alpha > 0$ per cui tocca

Parto con un dato iniziale sulla retta

$$\begin{cases} u' = \arctan(u-2t) \\ u(\beta) = 2\beta \text{ (sulla retta)} \end{cases}$$

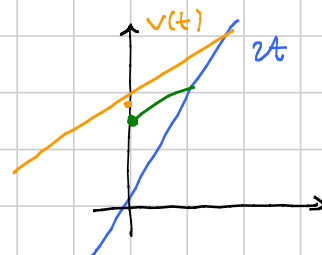
Tornando indietro, la solus. incontra l'asse $t=0$ in un certo $\alpha > 0$.



Se per un certo $\alpha_0 > 0$ tocca, allora tocca per tutti gli $\alpha \leq \alpha_0$

Fatto 8 Per ogni α tocca! Infatti $v(t) = \alpha + \frac{\pi}{2}t$ è soprasoluzione per $t \geq 0$

$$\underset{\frac{\pi}{2}}{v'(t)} \geq \arctan(v(t) - 2t)$$

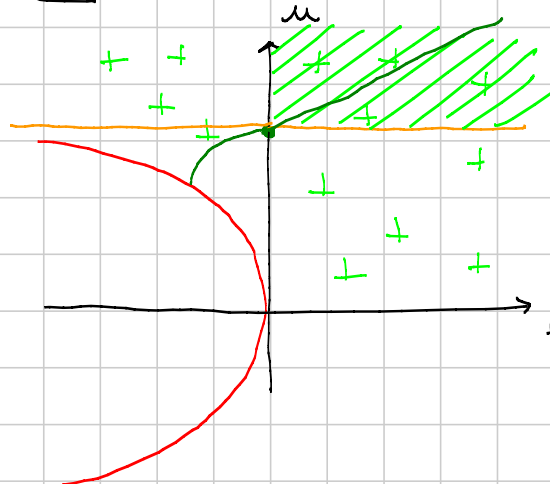


Oss. Calcoliamo $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{2t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(u(t)-2t)}{2} \leq \frac{\pi}{4} < 1$

$\uparrow$
 Hôp perché basta
 denomin $\rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ definitivamente $\frac{u(t)}{2t} \leq 2(1-\varepsilon)$ e questo basta

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \frac{1}{u^2+t} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



Per $t \leq 0$ c'è break down

Per $t \geq 0$ c'è esistenza globale perché

$f(t, u) \leq \frac{1}{\alpha^2}$ per $t \geq 0$ e $u \geq \alpha$ che è la zona in cui la soluzione vive.

Voglio trovare $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$ che esiste per monotonia

Brutal mode: se fosse $u(t) \rightarrow l$, avremmo $u'(t) \sim \frac{1}{l^2+t}$

$\Rightarrow u(t) \sim \log(t) \Rightarrow$ limite infinito

$\uparrow$
 oscilla da!
 pto di vista
 rigoroso

Dim. Se fosse $l \in \mathbb{R}$ avremmo $\alpha \leq u(t) \leq l$ per ogni $t \geq 0$, quindi

$u'(t) \geq \frac{1}{l^2+t}$, quindi $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$

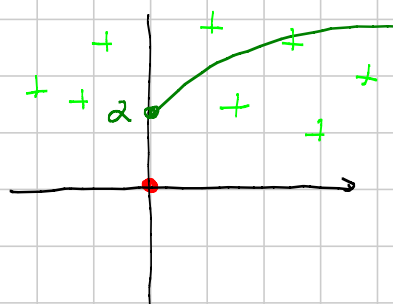
$\uparrow$
 ∞

$\geq \alpha + \int_0^t \frac{1}{l^2+s} ds$

$\rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$

In alternativa, basta individuare una sottosoluzione, una non sembra così evidente

Esempio 3 $\begin{cases} u' = \frac{1}{u^2 + t^2} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



Le soluzioni hanno limite finito.

Ora

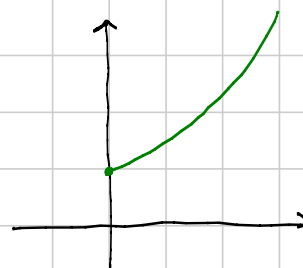
$$u'(t) \leq \frac{1}{t^2 + \alpha^2} \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

quindi
$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$$

$$\leq u(0) + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{s^2 + \alpha^2} ds}_{\text{converge quando } t \rightarrow +\infty}$$

In alternativa posso provare ad individuare una soprassoluzione.

Ritorno al passato $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

Domanda: c'è asintoto obliquo?

Dipende da

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{u(t) - \frac{\pi}{2}t}{v(t)}}_{v(t)}$$

Cosa risolve $v(t)$?

$$v'(t) = u'(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan(u(t)) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(v + \frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\pi}{2}$$

Quindi devo studiare

$$\begin{aligned} v' &= \arctan\left(v + \frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(v + \frac{\pi}{2}t\right)\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{1}{v + \frac{\pi}{2}t}\right) \end{aligned}$$

Ora $v(t)$ è monotona decr. ($v'(t) \leq 0$).

Supponiamo $v(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Brutal mode: $v'(t) \sim -\arctan\left(\frac{1}{l + \frac{\pi}{2}t}\right) \sim -\frac{1}{l + \frac{\pi}{2}t}$

e quindi $v(t) \rightarrow -\infty$

Con lo stesso sistema di prima dimostro rigoros. che $v(t) \rightarrow -\infty$ e quindi niente asintoto.

ANALISI 2

-

LEZIONE 114

Titolo nota

26/04/2016

Sopra / sotto soluzioni (Revisited)Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.Supponiamo che u sia di classe C^1 in $[t_0, t_0 + \delta)$

Diciamo che

$u'(t) \geq f(t, u(t))$	$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$	soprasoluz. debole
$u'(t) > f(t, u(t))$	"	soprasoluz. stretta
$\leq$		sottosol. debole
$<$		sottosol. stretta

Si intende che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$.Oss. Sopra e sotto soluz. hanno senso solo per le equazioni, non per i sistemi.Teorema 1 Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.Siano $v: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

- (i) f è continua in Ω
- (ii) v è soprasoluz. debole
- (iii) u è sottosoluz. debole
- (iv) per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ almeno una delle 2 disug. è stretta
- (v) $v(t_0) \geq u(t_0)$

Allora

$$v(t) > u(t) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$$

Dim. $w(t) := v(t) - u(t)$. Allora $w(t) > 0$ in un int. dx di t_0 .
 Se poi $w(t)$ diventa ≤ 0 si trova un assurdo.

Teorema 2 Stessa situazione del teo. 1 con 2 modifiche

- (+ ipotesi su f) : f è continua + dip. nella variabile u unif. in t
- (- ipotesi su u e v) : non c'è più l'ipotesi (iv)

Allora

$$v(t) \geq u(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta).$$

Oss. Nel caso dip. vale il teorema di confronto tra sopra e sotto sol. entrambe deboli

Dim. Sia L la costante di Lip., quindi

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1| \quad \forall (t, u_1, u_2) \text{ t.c. } (t, u_1) \in \Omega, (t, u_2) \in \Omega.$$

Dico che per ogni $\Delta > L$ e per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha che

$$v_\varepsilon(t) := v(t) + \varepsilon e^{\Delta t} \quad (\text{oss. } v_\varepsilon(t_0) > v(t_0) \geq u(t_0))$$

è sopra solus. stretta.

Se lo dim. ho finito perché dal teo. 1 segue che

$$v_\varepsilon(t) > u(t) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$$

e a quel punto basta fare il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Dimostro il claim

$$v'_\varepsilon(t) \stackrel{?}{>} f(t, v_\varepsilon(t))$$

$$\underbrace{v'(t)} + \underbrace{\varepsilon \Delta e^{\Delta t}} \stackrel{?}{>} \underbrace{f(t, v(t) + \varepsilon e^{\Delta t}) - f(t, v(t))} + \underbrace{f(t, v(t))}$$

Per ipotesi $v'(t) \geq f(t, v(t))$. Quindi basta dim. $>$ tra il resto

Basta dim. che

$$f(t, v(t) + \varepsilon e^{\wedge t}) - f(t, v(t)) < \wedge \varepsilon e^{\wedge t}$$

$$f(t, u_2) - f(t, u_1) \leq L |u_2 - u_1| = L \varepsilon e^{\wedge t} < \wedge \varepsilon e^{\wedge t}$$

$\uparrow$
 $\wedge > L$ ed il resto è > 0

Oss. Seme che $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo per essere sicuri che
 $(t, v_\varepsilon(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$.
 — o — o —

Usando sopra / sottosolus. abbiamo una nuova dim. del teo. di unicità per il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Dim. (che non è la migliore) Siano u e v due soluzioni. Considero u sottosol. e v soprasol. (deboli).

Teo 2 $\Rightarrow u(t) \leq v(t)$ per ogni $t \in \dots$

Considero v sottosol. e u soprasol. (deboli)

Teo 2 $\Rightarrow v(t) \leq u(t)$ per ogni $t \in \dots$ 😊.
 — o — o —

Oss. Così non vale per i sistemi. Tuttavia si può riadattare...

Dim. Siano u e v due soluzioni. Considero

$$w(t) := \|u(t) - v(t)\|^2 \quad w: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \textcircled{\mathbb{R}}_{\text{scalare}}$$

Ora $w'(t) = 2 \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle$
 quindi

$$|w'(t)| \leq 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot \|u'(t) - v'(t)\|$$

$\uparrow$
c.s.

$$= 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot \|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|$$

$$\leq 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot L \|u(t) - v(t)\|$$

$$= 2L w(t)$$

In conclusione $w'(t) \leq 2L w(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$

Questo dice che

w è sottosolus. di $u' = 2Lu$

e $z(t) \equiv 0$ è soprasolus. della stessa. Essendo $w(0) \leq z(0)$ deduco che

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{banale}}}{0} \leq w(t) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{z(t)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

e quindi $w(t) \equiv 0$.

— 0 — 0 —

Se io scrivo $w'(t) \leq 2L w(t)$ in forma integrale ottengo

$$w(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{w(t_0)} + \int_{t_0}^t w'(s) ds \leq 2L \int_{t_0}^t w(s) ds$$

e questo era il punto di partenza del Lemma di Gronwall dell'altra dimostrazione.

Teorema (Esistenza globale nel caso sublineare)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, u)| \leq A(t) + B(t) |u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

$\uparrow \quad \uparrow$
2 funzioni
continue

Allora c'è esistenza globale per ogni dato iniziale.

Dim. Basta escludere il blow-up.

Considero $w(t) := |u(t)|^2$

Allora

$$w'(t) = 2 \langle u(t), u'(t) \rangle$$

da cui

$$\begin{aligned} |w'(t)| &\leq 2 |u(t)| \cdot |u'(t)| \\ &= 2 |u(t)| \cdot |f(t, u(t))| \\ &\leq 2 |u(t)| \cdot [A(t) + B(t) |u(t)|] \\ &= 2 A(t) |u(t)| + 2 B(t) |u(t)|^2 \\ &\leq A^2(t) + |u(t)|^2 + 2 B(t) |u(t)|^2 \quad 2ab \leq a^2 + b^2 \\ &= A^2(t) + (2B(t) + 1) w(t) \end{aligned}$$

Abbiamo dim. che

$$w'(t) \leq A^2(t) + (2B(t) + 1) w(t)$$

quindi $w(t)$ è sottosoluz. di $u' = A^2(t) + (2B(t) + 1) u$

Si tratta di una eq. lineare le cui soluzioni sono globali (c'è la formula), quindi $w(t) \leq$ funzione globalmente definita, quindi $w(t)$ non può avere blow-up.

Oss. 1 La dim. vale in generale per i sistemi, quindi con
 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $t \quad u$

Basta interpretare $|x|$ come norma di x .

Oss. 2 Se $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la stessa dim. dice che la soluzione è definita su tutto $[a, b]$ ($t_0 \in (a, b)$)

ANALISI 2 -

LEZIONE 115

Titolo nota

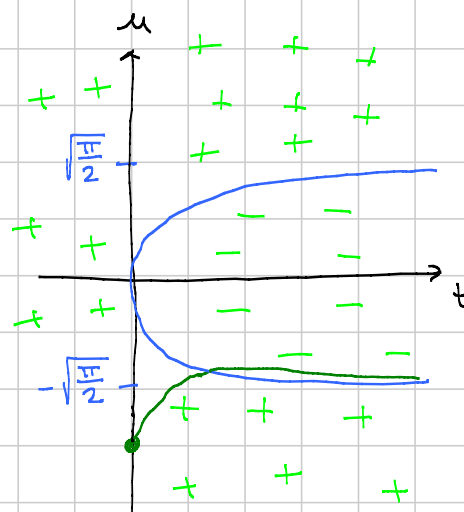
26/04/2016

Studio qualitativo con valori soglia

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Esistenza e unicità locale
no problem

Fatto 2 $u'(t) \geq 0 \Leftrightarrow u^2 - \arctan t \geq 0$
 $\Leftrightarrow |u| \geq \sqrt{\arctan t}$
 quindi + e - come in figura.



Fatto 3 Se $\alpha < 0$ allora per $t \geq 0$, allora la sol. cresce, poi tocca la curva blu, e poi decresce esistendo globalmente, tendendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dim. Perché tocca? Se non toccasse, sarebbe sempre crescente, quindi avrebbe un limite $l \in \mathbb{R}$, anzi $l \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
 Ma allora

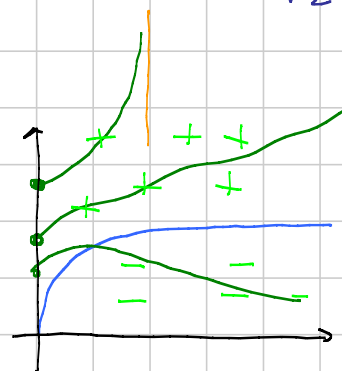
$$u' \rightarrow l^2 - \frac{\pi}{2}, \text{ il che sarebbe coerente se } l = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \dots$$

[Vediamo dopo (forse...)]

Fatto 4 Cosa può succedere per $\alpha > 0$?

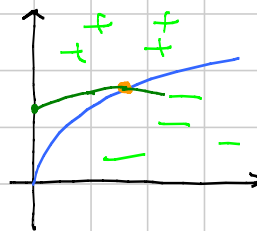
A sono almeno 3 possibilità

- tocca e poi scende
- esistenza globale restando sopra
- blow-up sopra



Fatto 4.1 Esistono valori $\alpha > 0$ per cui tocca.

Basta risolvere a partire dalla curva blu e tornare indietro

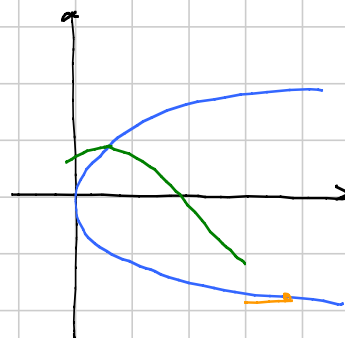


Fatto 4.2 Le soluzioni che toccano, poi restano dentro e decrescono tendendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Basta osservare che $v(t) := -\sqrt{\arctan t}$ è sottosoluzione per $t > 0$ (stretta)

$$\underbrace{v'(t)}_{< 0} \leq \underbrace{f(t, v(t))}_0$$

Analogamente $v(t) := \sqrt{\arctan t}$ è soprasol. stretta per $t > 0$



Una volta che sta nella zona $-$, $u(t)$ decresce e tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

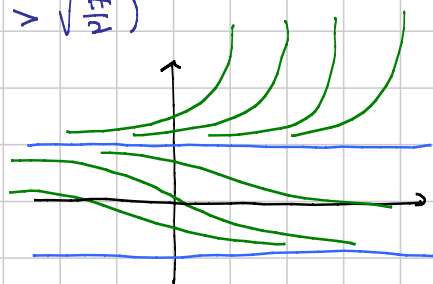
Fatto 4.3 Se per un certo $\alpha > 0$ la sol. tocca, allora tocca per tutti gli $\hat{\alpha} < \alpha$ (ovvio)

Fatto 4.4 Esiste $\alpha > 0$ per cui c'è blow-up.

Dim. Osservo che $\underbrace{u^2 - \arctan t}_{f(t, u)} \geq \underbrace{u^2 - \frac{\pi}{2}}_{g(t, u)} \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$

Le soluzioni di $v' = v^2 - \frac{\pi}{2}$ con dato $v(0)$ abbastanza grande hanno blow-up (basta $v(0) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

Ma le soluz. di $v' = v^2 - \frac{\pi}{2}$ sono sottosoluz. per $u' = u^2 - \arctan t$

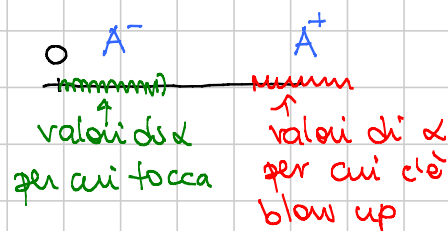


Quindi se $u(0) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, di sicuro ho blow-up.

Fatto 4.5 Se per un certo $\alpha > 0$ c'è blow-up, allora c'è per tutti gli $\hat{\alpha} > \alpha$.

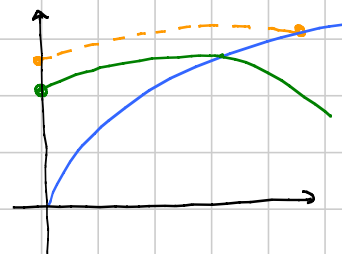
Fatto 4.6 Considero i valori di α t.c.

$$\sup A^- \leq \alpha \leq \inf A^+$$

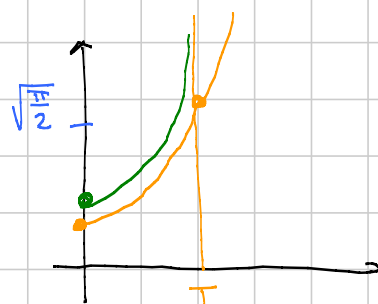


Cosa può succedere per questi α ?

→ può toccare? NO! Se toccasse, basterebbe partire da un punto più avanti sulla curva e avrei una soluzione con un $u(0)$ maggiore che tocca.



→ può avere blow up? NO! Se avesse blow up in un tempo T , basterebbe risolvere con dato $u(\tau) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e avrei una soluzione che sta sotto alla precedente e ha ancora blow up.



→ L'unica possibilità rimasta è avere esistenza globale restando crescente. A quel punto $u(t) \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$ e con il teo. asintotico si vede che $\ell = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. compensato

Non basta il teo. asintotico... Se fosse $\ell > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, allora ad un certo tempo supererebbe $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, e questo basta per avere blow-up.

Fatto 4.7 Abbiamo in realtà dimostrato che A^+ e A^- sono aperti.

Fatto 4.8 $\sup A^- = \inf A^+$, quindi c'è un'unica soluzione che esiste globalmente ed è crescente sempre.

Supponiamo che ce ne siano 2: $u_1(t)$ e $u_2(t)$ con $u_1(0) < u_2(0)$.

Considero $w(t) := u_2(t) - u_1(t)$. Allora

$$w'(t) = u_2'(t) - u_1'(t) = [u_2(t)]^2 - \arctan t - [u_1(t)]^2 + \arctan t \geq 0$$

perché $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$ per ogni $t \geq 0$.

D'altra parte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Fatto 5 Cosa succede per $\alpha < 0$. Dico che toccano tutte.

Se non toccano, tendono crescendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

In particolare, per ogni α abbastanza negativo farebbero tutte così.

Prendiamone 2: $u_1(t) < u_2(t)$ e poniamo $w(t) = u_2 - u_1$. Allora

$$w' = u_2' - u_1' = u_2^2 - \arctan t - u_1^2 + \arctan t$$

$$= \underbrace{(u_2 - u_1)}_{+} \underbrace{(u_2 + u_1)}_{-} \leq 0$$

e quindi non basta per un assurdo.

Problema... pensarsi...

— 0 — 0 —

ANALISI 2

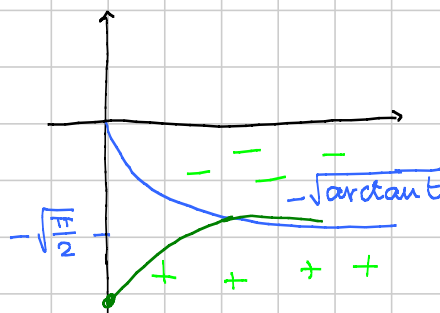
- LEZIONE 116

Titolo nota

27/04/2016

Cont. esempio precedente

$$\begin{cases} u' = u^2 - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$



Domanda: è vero che per $\alpha < 0$ tutte le solns. toccano la linea $u = -\sqrt{\arctan t}$

Sì! Se non toccassero, sarebbero monotone $\nearrow$, quindi $u \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ per ogni $t \geq 0$, quindi

$$u'(t) = u^2(t) - \arctan t \geq \frac{\pi}{2} - \arctan t \quad \arctan \frac{1}{s} \sim \frac{1}{s}$$

$$\text{da cui} \quad u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \geq \alpha + \int_0^t \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s \right) ds$$

diverge a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

quindi non è possibile che $u(t) \rightarrow -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ (sarebbe uguale $u^{20} - t^{34}$)

Caso 1: $\alpha < 0, t \geq 0$ La sol. sale finché tocca $u = -t$ e poi resta nel triangolo $\triangleleft$, formalmente perché

$v(t) := t$ è sottosoluz.

$$v'(t) \geq v^2(t) - t^2$$

1

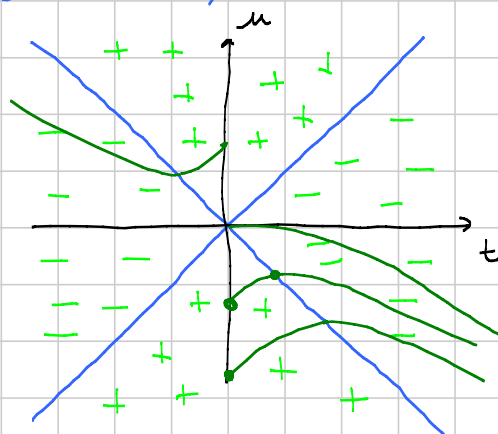
0

e $v(t) := -t$ è sottosoluz.

$$v'(t) \leq v^2(t) - t^2$$

-1

0



A quel punto c'è esistenza globale e $u(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$
 (il limite esiste per monotonia, se $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \rightarrow l^2 - \infty = -\infty$, contro tes. asintoto).

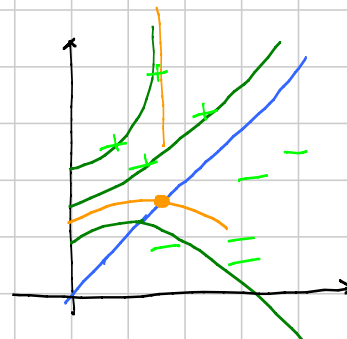
Caso 2: $\alpha > 0, t \geq 0$ Ci sono 3 opzioni

- tocca e poi decresce
- sta sopra ed esiste globalmente
- sta sopra e ha blow-up

Fissiamo notazione

$$A = \{\alpha > 0 : \text{tocca e decresce}\}$$

$$B = \{\alpha > 0 : \text{ha blow-up}\}$$



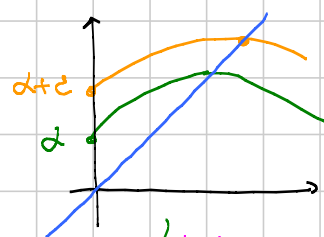
Fatto 1 $A \neq \emptyset$: basta partire sulla bisettrice e tornare indietro

Fatto 2 Se $\alpha \in A \Rightarrow$ ogni $\alpha' \leq \alpha$ sta ancora in A (banale)

Inoltre A è aperto, cioè se $\alpha \in A$, allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq A$.

Basta dim. che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\alpha + \varepsilon \in A$.

Basta partire sulla bisettrice un po' più in là

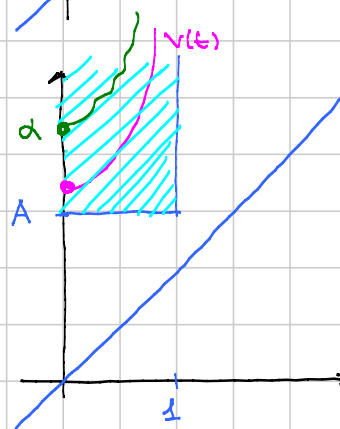


Fatto 3 $B \neq \emptyset$

Considero l'insieme (dato $A > 2$)

$$\Omega = \{(t, u) : t \in [0, 1], u \geq A\}$$

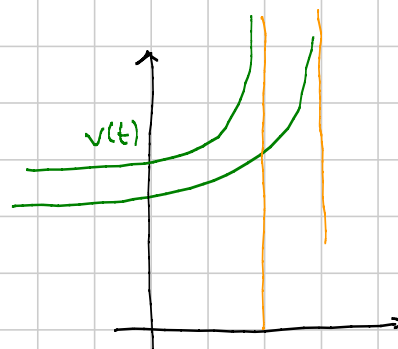
$$u^2 - t^2 \geq u^2 - 1 \quad \forall (t, u) \in \Omega$$



Considero l'eq. $v' = v^2 - 1$. Le soluzioni di questa con dato > 1 hanno blow-up. Inoltre è un problema autonomo, quindi le soluzioni sono tutte traslate della stessa.

CONSEGUENZA Esiste una soluzione di $v' = v^2 - 1$ con dato $v(0) > 1$ che ha blow up prima di $T=1$.

Ora questa $v(t)$ è sottosoluz. del nostro problema, quindi tutte le $u(t)$ che partono sopra devono avere blow-up prima di $T=1$.

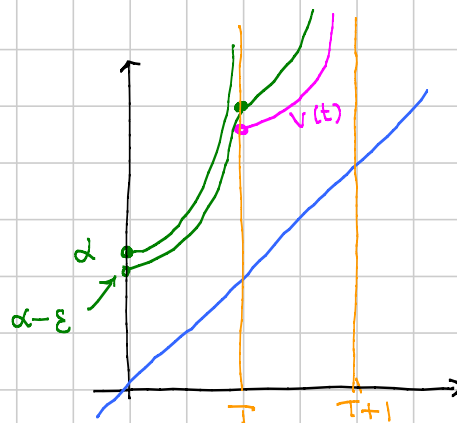


FATTO 4 Se $\alpha \in B$ e $\alpha' \geq \alpha$, allora $\alpha' \in B$ (banale)
Inoltre B è aperto.

Come prima basta dim. che per ogni $\alpha \in B$ esiste $\varepsilon > 0$ t.c.
 $\alpha - \varepsilon \in B$

Considero la striscia $t \in [0, T+1]$.
Allora lì vale

$$u^2 - t^2 \geq u^2 - (T+1)^2$$



Considero il problema

$$\begin{cases} v' = v^2 - \underbrace{(T+1)^2}_{\text{costante}} \\ v(T) = v_0 \end{cases}$$

Punto fondamentale: se v_0 è abb. grande, allora $v(t)$ ha blow-up prima di $T+1$

Ora considero il problema $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(T) = u_0 > v_0 \end{cases}$

e questo ha la soluz. che

→ nel futuro ha blow up (prima di $T+1$)

→ nel passato passa per $t=0$ in un p.to sotto α

FATTO 5 $\sup A \leq \alpha \leq \inf B$: ogni α in questo range produce una soluz. che

→ non può toccare, quindi $u(t) > t$ per ogni $t \geq 0$

↑ perché A è aperto

→ non può avere blow up, quindi deve esistere globalmente

↑ perché B è aperto

Una volta che è $\nearrow$ ed esiste glob., tende a $+\infty$ (solita)

Fatto 6 La soluz. che si incanalava è unica. Supponiamo che ce ne siano 2: $u_1(t) < u_2(t)$.

Pongo $w(t) := u_2(t) - u_1(t)$.

Allora

$$\begin{aligned} w'(t) &= u_2'(t) - u_1'(t) = u_2^2 - t^2 - u_1^2 + t^2 \\ &= \underbrace{(u_2 - u_1)}_{\geq w} \underbrace{(u_2 + u_1)}_{\geq w} \end{aligned}$$

Quindi $w'(t) \geq w^2(t)$ con $w(0) > 0$, ma questo dice che $w(t)$ ha blow-up in tempo finito, il che non è vero.

Considerare tempi $t \leq 0$ equivale a considerare $t \geq 0$ con dato iniziale cambiato di segno

Detto bene: se $u(t)$ è soluzione, allora $-u(-t)$ è soluz.

Infatti, posto $v(t) := -u(-t)$ abbiamo

$$v'(t) = u'(-t) = u^2(-t) - (-t)^2 = [v(t)]^2 - t^2$$

→ stessa equazione, solo dato iniziale opposto $v(0) = -u(0)$.

FATTO $+\infty$ L'incanalatrice ha come asintoto obliquo la retta $u(t) = t$. Devo dim. che $v(t) := u(t) - t$ tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

Vedo cosa risolve: $v'(t) = u'(t) - 1$

$$= u^2 - t^2 - 1$$

$$= (v+t)^2 - t^2 - 1$$

$$= v^2 + 2tv + t^2 - t^2 - 1$$

$$= v^2 + 2tv - 1$$

Si tratta di risolvere $v' = v^2 + 2tv - 1$

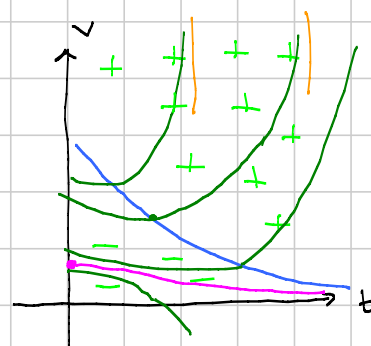
La separatrice fra + e - è una curva che tende a 0

$$v(t) = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\nearrow -t + \sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\searrow \sim -2t$$

— 0 — 0 —



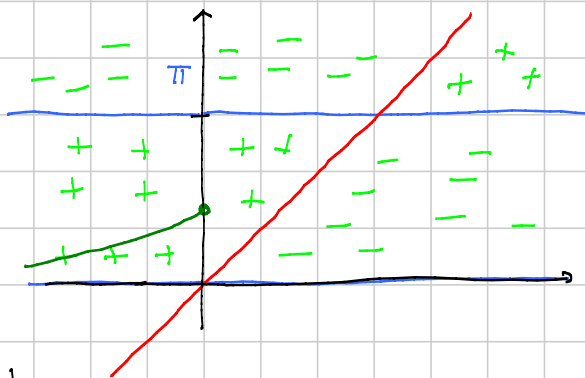
ANALISI 2

LEZIONE 117

Titolo nota

27/04/2016

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = \frac{\sin u}{u-t} \\ u(0) = \alpha \in (0, \pi) \end{cases}$$



FATTO 1 $u(t) \equiv \pi$ è soluz. per $t < \pi$

$u(t) \equiv 0$ è soluz. per $t < 0$ e per $t > 0$

FATTO 2 Per $t \leq 0$ la soluzione esiste globalmente (il blow-up è escluso dalla barriera $u(t) \in [0, 2\pi]$, il break down non ci può essere).

La sol. è monotona e tende ad un limite $l \in [0, \alpha]$

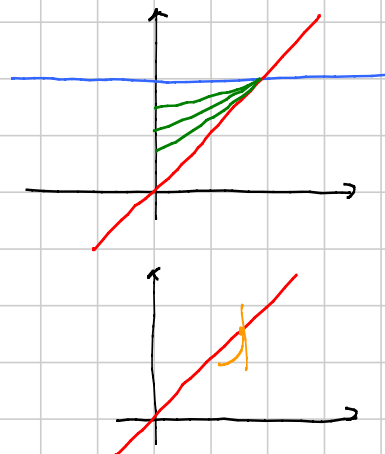
Non basta il teo. dell'asintoto per escludere $l \neq 0$. Dipende dal fatto che al denominatore c'è solo t , quindi sarebbe

$u' \sim \frac{\sin l}{l-t}$
 ↑
 onibile $\nearrow$ integrale divergente, ma ci torneremo dopo.

FATTO 3 Per $t \geq 0$ c'è la FOSSA COMUNE in π , cioè tutte le soluzioni hanno tempo di vita $= \pi$ e tendono a π

È chiaro che $u(t) < \pi$ finché esiste (altrimenti c'è violazione di unicità)

È intuitivamente chiaro che u non può toccare il rosso prima di $t = \pi$ perché dovrebbe farlo con derivata $+\infty$ e dall'alto non è possibile



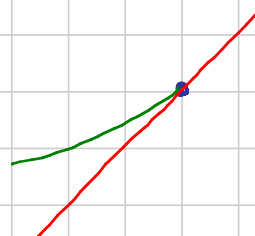
Formalizz. 1 Sia T il tempo di vita. Per assunto sia $T < \pi$. Allora $u(t)$ è monotona su $[0, T)$, quindi ha limite per $t \rightarrow T^-$ e questo limite vale T .

Scrivo il rapporto incrementale su T :

$$\frac{u(T-R) - u(T)}{-R} = \frac{u(T-R) - T}{-R}$$

$$\leq \frac{T-R-T}{-R} = 1$$

$u(t) \geq t$ e
denom. neg., quindi
si gira



D'altra parte

$$\frac{u(T-R) - u(T)}{-R} = u'(t(R)) = \frac{\sin u(t(R))}{u(t(R)) - t(R)}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

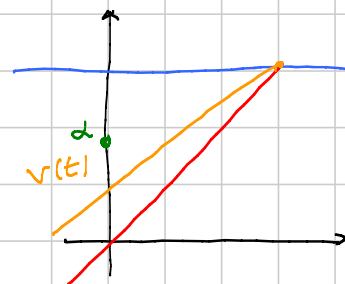
$\uparrow$
 $\sin T$

Formalizz. 2

Prendo $v(t) := \pi + (1-\varepsilon)(t-\pi)$

$\uparrow$ retta per (π, π) con coeff.
angolare $= 1-\varepsilon$

Spero che sia sottosoluz.



$$v'(t) \leq \frac{\sin v(t)}{v(t) - t}$$

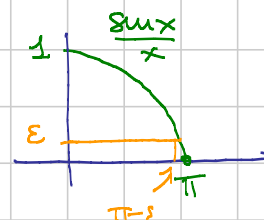
$$1-\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \frac{\sin(\pi + (1-\varepsilon)(t-\pi))}{\pi + (1-\varepsilon)(t-\pi) - t} = \frac{\sin((1-\varepsilon)(\pi-t))}{\varepsilon(\pi-t)}$$

$$\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \frac{\sin((1-\varepsilon)(\pi-t))}{(1-\varepsilon)(\pi-t)} = \frac{\sin x}{x}$$

con $x \in [0, (1-\varepsilon)\pi]$

Basta controllare che

$$\varepsilon \leq \frac{\sin((1-\varepsilon)\pi)}{(1-\varepsilon)\pi} \dots$$



BACK TO FATTO 2 Come dimostro che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$?

Fare disug. per $t \leq 0$ è una pena !! Giro il problema: pongo

$v(t) := u(-t)$. Cosa risolve?

$$v'(t) = -u'(-t) = -\frac{\sin u(-t)}{u(-t) - (-t)} = -\frac{\sin v(t)}{v(t) + t}$$

$$v' = -\frac{\sin v}{v+t}$$

Supponiamo che $v(t) \rightarrow l > 0$. Allora

$\sin v \geq \sin l$, quindi

↑ vale se $0 < l \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, ma ci si riduce facilmente a questo caso

$$\frac{\sin v}{v+t} \geq \frac{\sin l}{\pi+t} \quad \text{quindi} \quad v'(t) \leq -\frac{\sin l}{\pi+t}, \quad \text{quindi}$$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v'(s) ds \leq v(0) - \int_0^t \frac{\sin l}{\pi+s} ds$$

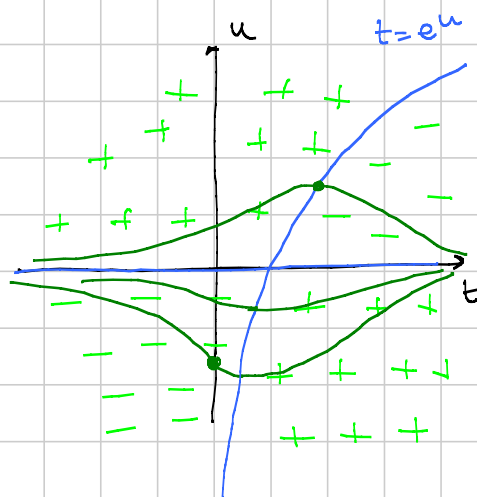
→ $-\infty$ e quindi $v(t) \rightarrow -\infty$ che è assurdo

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u \arctan(e^u - t) \\ u(0) = d \end{cases}$

$u(t) \equiv 0$ è soluz.

$d < 0$ Tutto standard e $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm \infty$ (teo. asintoto)



Oss. Dall'inizio posso dire che c'è sempre esistenza glob. poiché

$$|f(t, u)| \leq \frac{\pi}{2} |u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

- $\alpha > 0$
- tocca e scende (ci sono, basta partire dalla curva)
 - non tocca mai

Dico che ne esistono che non toccano mai.

Provo a vedere se $v(t) = t + k$ è sottosoluz.

$$v'(t) \leq v(t) \arctan(e^{v(t)} - t)$$

"

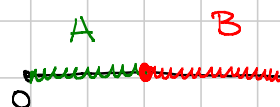
$$1 \leq \underbrace{(t+k)}_{\geq k} \arctan(\underbrace{e^{t+k} - t}_{\text{funzione cresc. (se } k \geq 0), \text{ quindi } \geq e^k})$$

Quindi basta che $1 \leq k \arctan(e^k)$
il che per k grande è vero.

Visto che la sottosoluz. non tocca, allora anche le soluz. che partono sopra non toccano.

$A = \{ \alpha > 0 : \text{la soluz. tocca} \}$

$B = \{ \alpha > 0 : \text{la soluz. non tocca} \}$



Il separatore sta in B perché A è aperto

Idea: $\rightarrow$ le soluzioni con $\alpha \in \text{Int}(B)$ vanno a $+\infty$ esponenzialmente

$\rightarrow$ la soluzione corrispondente a $\sup B = \sup A$ va a $+\infty$ logaritmicamente

Esercizio: dimostrarlo !!!!! (Esiste unica soluz. t.c.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{\log t} \in \mathbb{R}).$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE

118

Titolo nota

28/04/2016

DIPENDENZA CONTINUA E DINTORNI

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Come la soluzione dipende da } \alpha \\ u(t, \alpha) \end{array}$$

$$\text{1ª domanda: } \begin{cases} u'_n = f_n(t, u_n) \\ u_n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \quad \begin{cases} u'_\infty = f_\infty(t, u_\infty) \\ u_\infty(t_0) = \alpha_\infty \end{cases}$$

Se $\alpha_n \rightarrow \alpha_\infty$, possiamo dire che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ in qualche senso? Ancora più in generale con $f_n \rightarrow f_\infty$ in qualche senso.

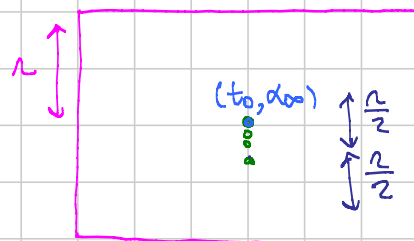
Subdomanda: è vero che le varie u_n hanno un tempo di vita in comune $[t_0, t_0 + \delta]$ che va bene per tutte.

Supponiamo che f sia la stessa ovunque, definita in un rettangolo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [\alpha_\infty - r, \alpha_\infty + r]$.

Sia M il max di $|f(t, u)|$ nel rettangolo

Scego δ_0 in modo tale che

$$\delta_0 \leq \delta \quad \uparrow \quad 2M\delta_0 \leq r$$



Allora per n abbastanza grande il problema appross ed il pbm. limite hanno almeno una soluz.

$$u_n: [t_0, t_0 + \delta_0] \rightarrow [\alpha_\infty - r, \alpha_\infty + r]$$

Dim. vero appena $|\alpha_\infty - \alpha_n| \leq \frac{r}{2}$. A quel p.to posso centrare in (t_0, α_n) un rettangolo di altezza $\frac{r}{2}$ contenuto in R .

Posso dire che le $u_n(t)$ verificano le ipotesi di A.A.

① Sono equilimitate in $[\alpha_\infty - 2, \alpha_\infty + 2]$

② Sono equilip. con costante $\leq M$.

Allora a meno di sottosucc. convergono a qualcosa

$$u_{m_k}(t) \rightarrow v_\infty(t) \quad \text{unif. in } [t_0, t_0 + \delta_0]$$

Vorrei tanto che $v_\infty(t)$ fosse $u_\infty(t)$

Forma diff. $u_{m_k} \rightarrow v_\infty$ unif. + f continua

$$\Rightarrow f(t, u_{m_k}(t)) \rightarrow f(t, v_\infty(t)) \quad \text{unif. in } \dots$$

" $u'_{m_k}(t)$

C'è convergenza nel p.to t_0 , quindi per il teo. di scambio della derivata

$$\begin{cases} v_\infty'(t) = f(t, v_\infty(t)) \\ v_\infty(t_0) = \alpha_\infty \end{cases}$$

Quindi $v_\infty(t)$ è una soluzione del problema limite.

Cosa abbiamo dim.: una succ. di soluz. con dato α_n ha una s. succ. conv. ad una soluz. con dato α_∞ .

Se sapessimo che il pbm. limite ha soluzione UNICA (ad esempio perché f è lip.) allora posso dire che non serve la sottosucc. cioè

$$u_{m_k}(t) \rightarrow u_\infty(t) \leftarrow \text{unica sol. pbm. limite}$$

↑ tutta

Dim. Solita applicazione del lemma della sotto-sotto.

Supponiamo in aggiunta che f sia dip. in u con costante L , come nel teo. CLPL. Allora, date 2 soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ vale la stima

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(t_0) - v(t_0)| e^{\frac{L(t-t_0)}{L(t-t_0)}} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_0]$$

(si intende che $u(t)$ e $v(t)$ sono def. in $[t_0, t_0 + \delta_0]$ e stanno in un rettangolo R dove la costante di dip. è L)

Dim. $w(t) := |u(t) - v(t)|^2$ (così vale anche per i sistemi)

$$|w'(t)| = 2| \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle |$$

$$\leq 2|u(t) - v(t)| \cdot L |u(t) - v(t)|$$

$$= 2L w(t)$$

Quindi $w'(t) \leq 2L w(t)$ equazione scalare

quindi è sottosolut. di $z' = 2Lz \leadsto$

$$w(t) \leq w(t_0) e^{2L(t-t_0)} \quad \text{soluz.}$$

Farendo la radice ho la tesi.

Brutal mode Non mi provare a dim. che la soluz. dipende in modo C^1 dal dato iniziale α , almeno sotto certe ipotesi

$$\begin{cases} u'_\alpha = f(t, u_\alpha) \\ u_\alpha(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u'_{\alpha+\varepsilon} = f(t, u_{\alpha+\varepsilon}) \\ u_{\alpha+\varepsilon}(t_0) = \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{u_{\alpha+\varepsilon}(t) - u_\alpha(t)}{\varepsilon} = w_\varepsilon(t) \quad \text{e vedo che succede}$$

$$\begin{aligned} w'_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon} [f(t, u_{\alpha+\varepsilon}(t)) - f(t, u_\alpha(t))] \frac{u_{\alpha+\varepsilon}(t) - u_\alpha(t)}{u_{\alpha+\varepsilon}(t) - u_\alpha(t)} \\ &= w_\varepsilon(t) \frac{f(\dots) - f(\dots)}{u_{\alpha+\varepsilon}(t) - u_\alpha(t)} \end{aligned}$$

$\downarrow \varepsilon \rightarrow 0$
 $f_u(t, u_\alpha(t))$

$w_\varepsilon(t) \rightarrow w(t)$ che risolve

$$w'(t) = f_u(t, u_\alpha(t)) w(t)$$

Fissato α , questa è una funzione di t , quindi ho scritto un'eq. lin. in $w(t)$.

Risultato (dimostrabile rigorosamente): la soluzione $u(t, \alpha)$ è derivabile rispetto ad α e vale

$$u_\alpha(t, \alpha) = w(t)$$

$\uparrow$ soluz. part. di sopra
 α α α

Condizioni di tipo OSGOOD

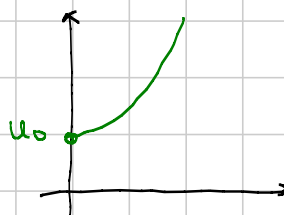
1^a situazione

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo

$$f: [u_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

positiva



Cosa decide se c'è o no blow-up? È l'integrale

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du = \begin{cases} +\infty & \Rightarrow \text{esistenza globale} \\ \text{conv.} & \Rightarrow \text{blow up} \end{cases}$$

2ª situazione $\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \\ f(0) = 0 \end{matrix}$

La soluz. $u(t) \equiv 0$ è unica?

$$\int_0^1 \frac{1}{f(u)} du = \begin{cases} +\infty & \Rightarrow \text{unicità} \\ \text{conv.} & \Rightarrow \text{non unicITÀ} \end{cases}$$

Esempio supponiamo che

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_1 - u_2| \cdot |\log |u_1 - u_2||$$

Questa cond. è meno della Lip. e più della Hölder

Questa cond. basta per l'unicità del pbm. di Cauchy.

Se faccio la diff. $w(t) = u_2(t) - u_1(t)$

$\uparrow$ 2 soluz. $\uparrow$ di $u' = f(t, u)$

$\leadsto$ arrivo a $w'(t) \leq \underbrace{w(t) \cdot \log |w(t)|}_{f(w) - w \log w}$

Come si dim. le 2 situazioni? 1ª situazione

$$u' = f(u) \leadsto \frac{du}{f(u)} = dt \leadsto \underbrace{\int \frac{du}{f(u)}}_{\phi(u)} = t + C$$

se voglio ricavare per t grandi $\uparrow$

e ora vorrei ricavare la funzione di $t \leadsto$ serve ϕ non limitata

ANALISI 2

—

LEZIONE 119

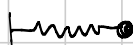
Titolo nota

29/04/2016

Equazioni diff. di ordine 2 → Spazio delle fasi
→ Metodi energetici

Esempio classico $u'' = -u$ (più in gen. $u'' = -ku$ con $k > 0$)

Oscillatore armonico



u = distanza dal p.to di equilibrio

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$

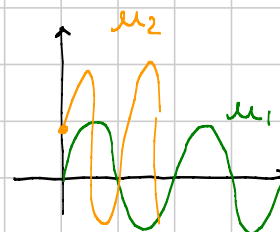
$$u(t) = a \sin(\sqrt{k}t) + b \cos(\sqrt{k}t)$$

Tutte le soluzioni sono periodiche con lo stesso periodo.

Oss. $u_1 = \sin t$ $u_1(0) = 0$ $u_1'(0) = 1$
 $u_2 = 3 \sin t + \cos t$ $u_2(0) = 1$ $u_2'(0) = 3$

Non è vero che $u_2(t) \geq u_1(t)$ per ogni $t \geq 0$

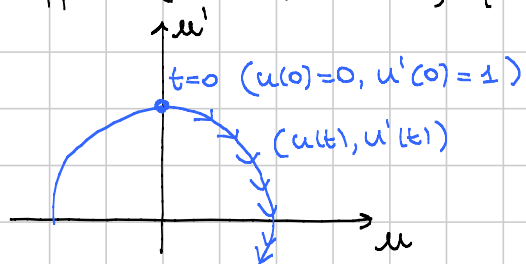
Quindi: ADDIO TED. CONFRONTO



Achtung! Il fatto che le soluzioni si incrocino NON è una violazione di unicità: basta che si incrocino con derivata diversa.

SPAZIO DELLE FASI Che cosa descrive lo stato del sistema?

La coppia $(u(t), u'(t))$, quindi 1 p.to nel piano



$$u(t) = \sin t$$

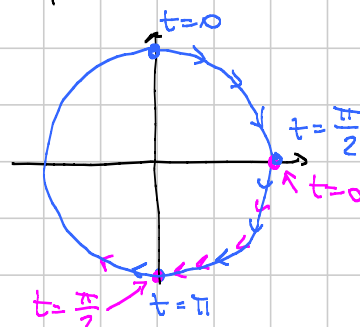
$$u'(t) = \cos t$$

Descrizione nello spazio delle fasi: disegnare la curva $(u(t), u'(t))$ al variare di t dove la soluz. è definita

Teo. unicità: curve relative a soluz. diverse non possono passare per lo stesso p.to allo stesso tempo.

Possono passare per lo stesso p.to a tempi diversi

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin t && \rightsquigarrow (\sin t, \cos t) \\ u(t) &= \cos t && \rightsquigarrow (\cos t, -\sin t) \end{aligned}$$



Nello spazio delle fasi percorrono la stessa curva sfasate di $\frac{\pi}{2}$.

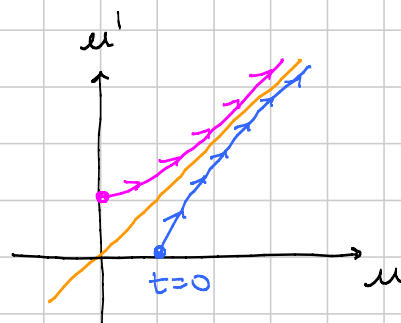
Esempio 2 $u'' = u$

$$u(t) = a \sinh t + b \cosh t$$

$$u(t) = \cosh t \rightsquigarrow (\cosh t, \sinh t)$$

$$u(t) = \sinh t \rightsquigarrow (\sinh t, \cosh t)$$

La soluz. non è periodica



In generale un'eq. di ordine 2 si presenta come

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u') \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Si può riscrivere come sistema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = f(t, u, v) \end{cases}$$

$$F(t, u, v)$$

$$F: \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{u}{\mathbb{R}} \times \underset{v}{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Un'ipotesi del tipo

$$|f(t, u, v)| \leq \underset{\uparrow A(t)}{A} + \underset{\uparrow B(t)}{B}|u| + \underset{\uparrow C(t)}{C}|v|$$

$$\forall (t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

garantisce l'esistenza globale

Esempio 3 $u'' = -u^3 \leftarrow$ RHS non verifica hp per esistenza globale

Metodo energetico: moltiplico LHS e RHS per $\dot{u}$:

$$\ddot{u} = -u^3 \quad \leadsto \quad \underset{''}{\dot{u}} \underset{''}{\dot{u}} = - \underset{''}{u^3} \underset{''}{\dot{u}}$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{4} u^4 \right]'$$

$$\leadsto \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 \right]' = 0$$

$$\leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) + \frac{1}{4} u^4(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2(0) + \frac{1}{4} u^4(0)}_{\text{costante che dipende solo dalle cond. iniz.}} \quad \forall t \text{ per cui la soluz. esiste}$$

Definisco $E(t) := \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) + \frac{1}{4} u^4(t)$ (energia del sistema)

e ho dimostrato che $E(t) = E(0)$ per ogni t per cui la soluz. esiste.

Oss. Il metodo vale in generale per eq. del tipo

$$u'' = f(u)$$

$\uparrow$ dipende solo da u , non da t o $\dot{u}$

$$\ddot{u} = f(u) \dot{u} \quad \leadsto \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = [F(u)]' \quad F = \text{prim. di } f$$

$$E(t) := \frac{1}{2} \dot{u}^2 - F(u) \quad \leadsto \quad E'(t) = 0$$

$\leadsto E(t)$ è costante lungo le soluzioni

— o — o —

Nell'esempio di partenza

$$\ddot{u} = -u \leadsto \ddot{u} \dot{u} = -u \dot{u} \\ \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{2} u^2 \right]'$$

$$E(t) = \frac{1}{2} (\dot{u}^2 + u^2) \leadsto \text{le soluzioni verificano}$$

$$\dot{u}^2 + u^2 = \text{costante}$$

Nello spazio delle fasi stanno su una circ. il cui raggio dipende da $E(0)$, cioè dal "livello energetico"

Back to esempio 3

$$\underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4}_{E(t)} = \text{cost.}$$

Conseguenza 1: $u(t)$ e $\dot{u}(t)$ sono limitate (le potenze al LHS sono pari), quindi non può esserci blow-up

Achtung! Per le equazioni di ordine 2 blow up si ha quando

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| + |u'(t)| = +\infty$$

Quindi nell'esempio 3 c'è esistenza globale per ogni dato iniziale !! (Break down non può esserci perché il RHS dell'eq. è sempre definito)

Conseguenza 2: in un certo senso l'equazione è diventata di ordine 1.

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = c \quad \dot{u}^2 = c - \frac{1}{2} u^4$$

$$\dot{u} = \pm \sqrt{c - \frac{1}{2} u^4} \quad \leadsto \text{almeno teoricamente posso risolvere esplicitamente}$$

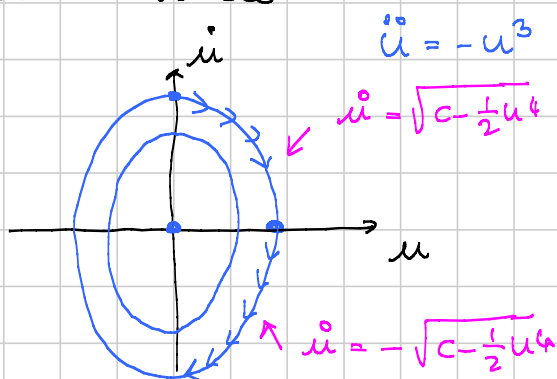
dipende dai dati iniziali

↑
posso scegliere sulla base del dato iniziale

Conseguenza 3 : so su quale curva "vivono" le soluzioni

Le linee di livello dell'energia sono le curve su cui stanno le soluzioni

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = C$$



Domanda: le soluzioni sono periodiche, cioè prima o poi torno al p.to di partenza?

Per quanto ne sappiamo ora, potrebbero percorrere anche solo un tratto!

— o — o —

ANALISI 2

-

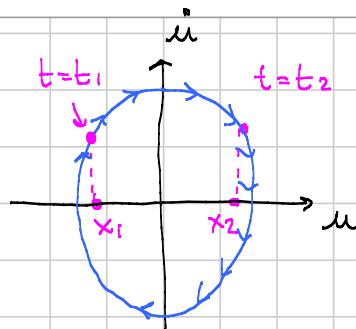
LEZIONE 120

Titolo nota

29/04/2016

Back to esempio precedente $\ddot{u} = -u^3$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = c$$



Domanda: ritorna su se stessa?

Nel tratto alto $\dot{u} = \sqrt{2c - \frac{1}{2} u^4}$, quindi
 ↑ segno +

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{2c - \frac{1}{2} u^4(t)}} = 1 \quad \text{integro tra } t_1 \text{ e } t_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dots = t_2 - t_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'(t)}{\sqrt{\dots}} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2} x^4}} = t_2 - t_1$$

↑
 $x = u(t)$ ↑
 limitato indip. da x_1 e x_2

L'integrale al max vale

$$\int_{-\sqrt[4]{4c}}^{\sqrt[4]{4c}} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2} x^4}} < +\infty$$

integrale improprio convergente
 perché c'è una radice quadrata
 (analisi 1)

Ad esempio per $c = \frac{1}{4} \rightsquigarrow \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

in $x=1$ è il
 colpevole dell'int.
 improprio

Conclusione: le soluzioni sono periodiche
 con periodo

$$2 \int_{-\sqrt[4]{4c}}^{\sqrt[4]{4c}} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2} x^4}}$$

Back to esempio 1 $\ddot{u} = -u \leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = c$

$$\leadsto \dot{u}^2 + u^2 = c \quad \dot{u} = \sqrt{c - u^2}$$

$$T = 2 \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \frac{dx}{\sqrt{c - x^2}}$$

Pongo $x = \sqrt{c} y \quad dx = \sqrt{c} dy$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{c} dy}{\sqrt{c - cy^2}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 2\pi$$

= π (primitiva è arcsin)

Oss. importante: il periodo non dipende da c

Stesso conto con $\ddot{u} = -u^3$

$$T = 2 \int_{-\sqrt[4]{4c}}^{\sqrt[4]{4c}} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2}x^4}}$$

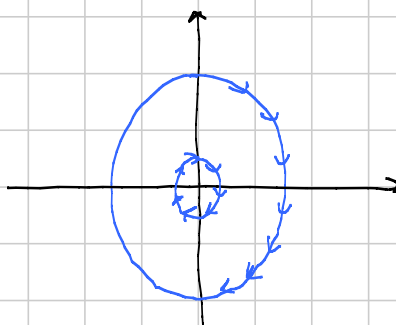
Pongo $x = \sqrt[4]{2c} y \quad dx = \sqrt[4]{2c} dy$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[4]{2c} dy}{\sqrt{2c - 2c y^4}} = 2 \frac{\sqrt[4]{2c}}{\sqrt[4]{2c}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{c}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$$

$\Rightarrow$ Più il livello energetico è alto, più il periodo è breve
Inoltre il periodo tende a ∞ quando il livello energetico va a 0.

$$\ddot{u} = -u^3$$

↑
più siamo su un livello basso, più la forza di richiamo è debole



Esempio 4 $u'' = u^3$

$$\dot{u} \ddot{u} = u^3 \dot{u}$$

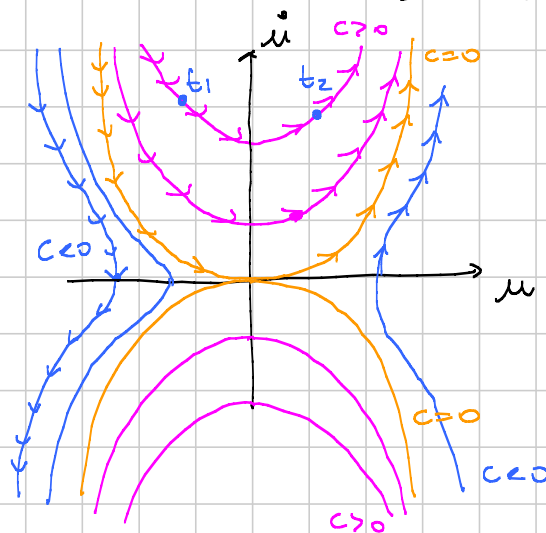
$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[\frac{1}{4} u^4 \right]'$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{4} u^4 = C$$

Ora le soluzioni stanno sulle linee di livello di $E = \frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{4} u^4$

$$\dot{u} = \pm \sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}$$

Mettiamo di essere con $C > 0$
e $\dot{u} > 0$. Questo ci dice
che fino a quando la
soluzione esiste avrà
 $u'(t) > 0$ e quindi sarà
monotona crescente



$$u'(t) = \sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}$$

e queste di sicuro hanno blow-up in tempo finito
(Sono crescenti e RHS ha crescita quadratica all'infinito)

Posso anche stimare il tempo di blow-up. Supponiamo di
avere $u(t_0) = u_0$

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}} = 1 \quad \int_{t_0}^T \frac{u'(t)}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}} dt = T - t_0$$

$$+\infty \rightarrow u(\tau) \quad \int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} x^4}} = T - t_0$$

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} x^4}} \text{ converge} = T - t_0$$

↑
tempo di blow-up

Esempio (Pendolo) $\ddot{u} = -\sin u$ $\ddot{u} \dot{u} = -\sin u \cdot \dot{u}$
 $\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2\right]' = [\cos u]'$

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) - \cos u(t) = E(0) \text{ costante}$$

per u piccolo $\tilde{e}$
 $\sim \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2$

Come sono fatti i livelli di E ?

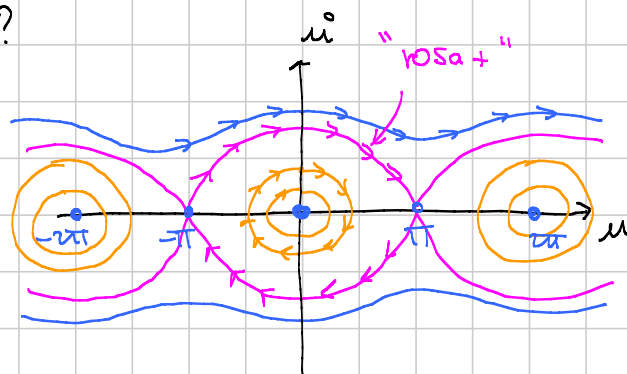
$$E(0) = -1$$

$$E(0) \in (-1, 1)$$

$$E(0) = 1$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 = 1 + \cos u$$

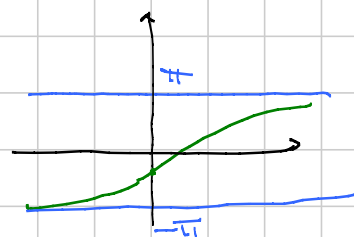
$$\dot{u} = \pm \sqrt{2(1 + \cos u)}$$



$$E(0) > 1$$

Esercizio 1: mostrare che la soluzione "rosa+" tende a $\pm\pi$ per $t \rightarrow \pm\infty$

$$u'(t) = \sqrt{2(1 + \cos u)}$$



Domanda: come dipende il periodo
 delle soluz. periodiche dal livello energetico
 (direi che aumenta, verificare con il int. improprio)

ANALISI 2

-

LEZIONE 121

Titolo nota

03/05/2016

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Oss. 1 Un sistema di eq. diff. di ordine qualunque si può sempre ridurre ad un sist. di eq. di ordine, a patto di aumentare il numero di incognite
 $\rightarrow$ teo. di esistenza / unicità generali si applicano

Oss. 2 Per i sistemi lineari, si può fare il contrario, cioè sistema $\rightarrow$ eq. singola di ordine superiore

Esempio $\begin{cases} u' = 7u - v \\ v' = 5u + v \end{cases}$ Voglio trovare un'eq. di ordine 2 nella variabile u

Derivo 1^a: $u'' = 7u' - v' = 7u' - 5u - v = 7u' - 5u + u' - 7u$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad v' \text{ dalla 2^a} \quad \quad v \text{ dalla 1^a}$

$$u'' - 8u' + 12u = 0 \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \quad (x-2)(x-6) = 0$$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{6t} \quad \rightarrow \quad v(t) = 7u(t) - u'(t) = \dots \text{conto.}$$

$\uparrow$
1^a eq.

Un sistema lineare omogeneo si può scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \overset{A}{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$U' = AU$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 6$

Teoria generale dei sistemi di n equazioni di evoluzione lineari a coeff. costanti omogenee

$$U' = A U$$

matrice $n \times n$

↑
vettore

Supponiamo che A sia diagonalizzabile

$$A = M^{-1} D M$$

invertibile
↑
diagonale

$$U' = M^{-1} D M U \rightsquigarrow M U' = D M U$$

$$(M U)' = D (M U)$$

↑
 M è costante

Posto $V = M U$, il sistema diventa

$$V' = D V \rightsquigarrow \text{sistema disaccoppiato (sistema FINTO)}$$

$$V = (v_1, \dots, v_n) \quad D = \text{diagonale con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sulla diagon.}$$

$$v_1' = \lambda_1 v_1 \rightsquigarrow v_1(t) = v_1(0) e^{\lambda_1 t}$$

$$v_2' = \lambda_2 v_2$$

⋮

$$v_n' = \lambda_n v_n$$

Una volta noto il vettore $V(t)$ posso ricavarne

$$U(t) = M^{-1} V(t)$$

In conclusione, supponendo A diagonalizzabile con autov. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e rispettivi autovettori $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, cioè

$$A \varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La soluzione generale è data dalla formula

$$U(t) = c_1 \varepsilon_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \varepsilon_n e^{\lambda_n t}$$

autovettori autov. $c_1, \dots, c_n$ si determinano con i dati iniziali

Esponenziale di una matrice = Altro modo di scrivere la stessa cosa.

Def. Data una matrice $A_{n \times n}$, si definisce

$$\boxed{e^A} = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

↑
matrice
↑
identità
serie di matrici

Aurrebbe verificato che la serie converge, e si può fare in tanti modi, ad esempio

→ lo spazio delle matrici è uno spazio vettoriale con una norma, ad esempio

$$\|M\| = \left(\sum_{i,j} M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

→ Questa norma lo rende completo (così come qualunque altra norma, visto che sono tutte equivalenti)

per una norma qualunque

→ Se uno dimostra che $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, allora per induzione

$$\|M^k\| \leq \|M\|^k$$

→ A questo punto la serie delle norme converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M\|^k}{k!} = e^{\|M\|} < +\infty$$

→ Per un fatto generale sulle serie negli spazi vettoriali anche la serie delle matrici converge.

Oss. Se A è diagonale, allora e^A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Prop. Se A è diagonalizzabile, cioè $A = M^{-1} D M$
↑
diagonale

allora

$$e^A = M^{-1} e^D M$$

Dim. Basta osservare che le potenze commutano con il cambio di base

$$A = M^{-1} D M \quad \leadsto \quad A^k = M^{-1} D^k M$$

e con le somme, quindi

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = M^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} \right) M$$

Basta ora fare il limite per $n \rightarrow +\infty$.

Oss. Tutto funziona uguale anche se A è diagon. in $\mathbb{C}$

Oss. Quando A non è diagon. posso comunque usare la forma canonica di JORDAN e semplificare di molto il conto

Equazioni : $u' = a u \quad \leadsto \quad u(t) = u(0) e^{at}$

Sistemi : $U' = A U \quad \leadsto \quad U(t) = e^{A t} U(0)$

↑
vettore
↑
matrice
↑
vettore

Dim. È praticamente (nel caso diagon.) quella fatta prima.

Achtung! $e^{A+B} \stackrel{?}{=} e^A \cdot e^B$

↑
 NI: è vero solo se A e B commutano

Brutal mode $e^A \cdot e^B = \left(I + A + \frac{A^2}{2} + \dots \right) \left(I + B + \frac{B^2}{2} + \dots \right)$

$$= I$$

$$+ A + B$$

$$+ \frac{B^2}{2} + AB + \frac{A^2}{2}$$

potenze 0 - ordine

esponente 1

esponente 2

$$\frac{1}{2} (B^2 + 2AB + A^2) = \frac{1}{2} (A+B)^2$$

↑
 NO: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + \underbrace{AB + BA}_{\substack{\text{se commutano} \\ \hat{=} 2AB}}$

Achtung! $[e^{A(t)}]' \stackrel{?}{=} A'(t) e^{A(t)}$

anche questa in generale non è vera...

Funktiona solo che $[e^{At}]' = A e^{At}$

Volevamo: $e^{A(t_0+R)} - e^{A t_0} = e^{A t_0} \cdot e^{AR} - e^{A t_0}$

↑
 ok perché
 $t_0 A$ e $R A$
 commutano

$$= e^{A t_0} (e^{AR} - I)$$

Ora si tratta di mostrare che $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{e^{AR} - I}{R} = A$

ma questo si fa, volendo derivando per serie

$$\frac{e^{AR} - I}{R} = \frac{\cancel{I} + RA + \frac{1}{2} A^2 R^2 + \dots - \cancel{I}}{R} \rightarrow A.$$

ANALISI 2

—

LEZIONE 122

Titolo nota

03/05/2016

PROBLEMA DELLA STABILITÀ Caso lineareConsideriamo un sistema lin. omog. $U' = A U$ $\uparrow$ matrice $m \times n$ FISSAL'origine è un p.to stazionario, nel senso che $A0 = 0$, quindi $U(t) \equiv 0$ è una soluz. del sistema
 $\uparrow$
vettoreDomande: ① Se $U(0)$ è vicino all'origine, la soluzione resta vicina all'origine per ogni $t \geq 0$?
② Se $U(0)$ è vicino all'origine (o anche non vicino) è vero che $U(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$?Oss. Il p.to (1) non è il te. di dipendenza continua dai dati perché lo chiedo per ogni $t \geq 0$.Nel caso lineare si risponde risolvendo. Caso particolare 2×2 . Tutto dipende dalla forma canonica di A .Caso 1 Autovettori reali e diagonalizzabile.Siano λ e μ gli autovettori. Dopo aver diagonalizzato il sistema diventa

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ v' = \mu v \end{cases} \quad \begin{matrix} x^t \\ u(t) = u(0) e^{\lambda t} \\ v(t) = v(0) e^{\mu t} \end{matrix}$$

Il comportamento asintotico dipende dal segno di λ e μ .

- Se λ e μ sono < 0 , allora risp. si alla domanda ② (e anche alla ①)

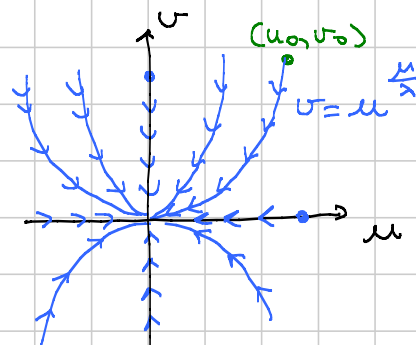
- Se λ e μ sono ≤ 0 , allora risp. si alla domanda ①, ma non nec. alla ②.
- Se λ opp. μ è > 0 , allora NO ad entrambe

Spazio delle fasi di un sistema = rappresentarlo come curve in $\mathbb{R}^n$

Caso $\lambda < 0$ e $\mu < 0$

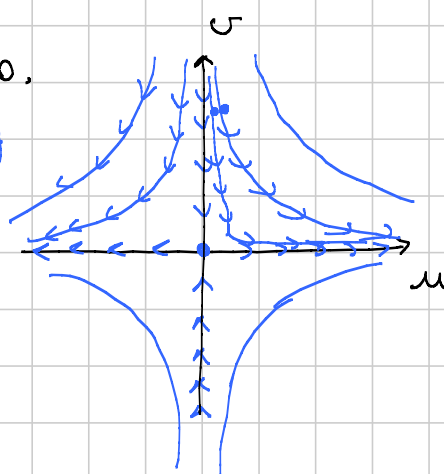
$$\begin{aligned} u_0 e^{+\lambda t} &= u \\ v_0 e^{+\mu t} &= v \end{aligned}$$

$$v = u^{\frac{\mu}{\lambda}} \quad (\text{interpretato se } u \text{ è negativo})$$



Se $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ il disegno è lo stesso, ma le frecce sono al contrario.

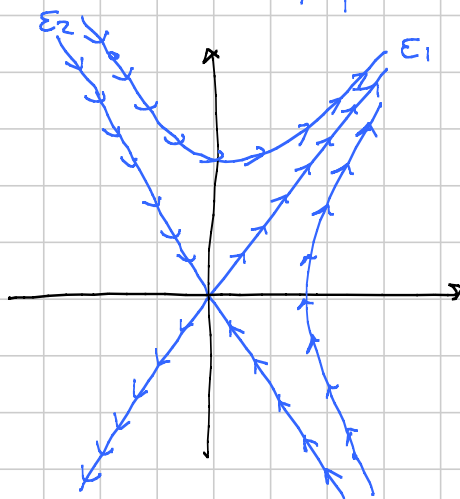
Se $\lambda > 0$ e $\mu < 0$ allo $v = u^{\frac{\mu}{\lambda}}$ neg



I disegni valgono se la matrice è già diagonale, altrimenti c'è la distorsione lineare dovuta al cambio di variabili $\mathcal{M}$.

$$A \varepsilon_1 = \lambda \varepsilon_1 \quad \text{con } \lambda > 0$$

$$A \varepsilon_2 = \mu \varepsilon_2 \quad \text{con } \mu < 0$$



Caso 2 Autovalori complessi (veramente) coniugati $\alpha \pm i\beta$

La forma canonica (Jordan reale) è

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ e il sistema diventa}$$

$$u' = \alpha u + \beta v$$

$$v' = -\beta u + \alpha v$$

Potei riportarlo ad una eq. di ordine 2, ma è comodo passare in coord. polari

$$\begin{cases} u(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ v(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad \text{Cosa risolvono } \rho \text{ e } \theta ?$$

$$u' = \rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta = \alpha \rho \cos \theta + \beta \rho \sin \theta$$

1^a equ.

$$v' = \rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta = -\beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta$$

2^a equ.

$$\boxed{1^a \cdot \cos \theta + 2^a \sin \theta} \quad \rho' = \alpha \rho \quad \rho(t) = \rho(0) e^{\alpha t}$$

$$\boxed{1^a \cdot (-\sin \theta) + 2^a \cos \theta} \quad \rho \theta' = -\beta \rho$$

$$\theta' = -\beta \quad \theta(t) = \theta(0) - \beta t$$

ho semplificato perché o $\rho(t) \equiv 0$ (e allora θ non è così importante) o $\rho(t) \neq 0$ sempre

Quindi in coord. polari ho

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho(0) e^{\alpha t} \\ \theta(t) &= \theta(0) - \beta t \end{aligned}$$

ρ cresce / decresce a seconda del segno di α

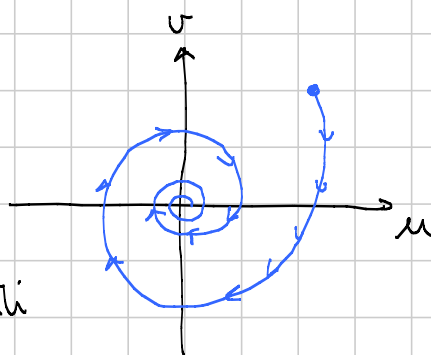
θ ruota

$\alpha < 0$

$\Rightarrow$ le traiettorie sono spirali entranti o uscenti a seconda del segno di α



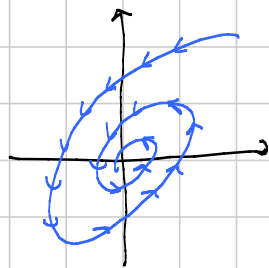
dipende da come ho scelto le variabili



Nelle variabili originarie è tutto "storto"

Quindi

- la domanda ② ha risp. sì se $\alpha < 0$
- " " ① ha risp. sì se $\alpha \leq 0$
(per $\alpha = 0$ le traiettorie sono cerchi / ellissi)



Caso 3 Non diagonalizzabile : forma canonica $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v \\ v' = \lambda v \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = \lambda u + v(0)e^{\lambda t} \\ v(t) = v(0)e^{\lambda t} \end{cases} \rightsquigarrow u(t) = ce^{\lambda t} + dt e^{\lambda t}$$

$\uparrow$
si determina

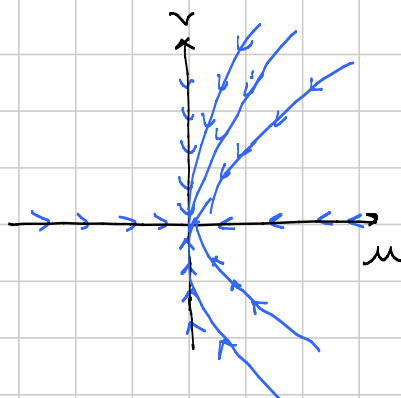
Quindi

- la domanda ② ha risposta sì se $\lambda < 0$ e no altrimenti
- la domanda ① è più complicata ($\lambda = 0$ va sempre male a meno che non venga $d = 0$)

Per $\lambda < 0$ le traiettorie sono

$$u = \varphi(v)$$

$$\text{con } \varphi(x) = kx + R x \log x$$



Teorema generale (valido per un sistema $n \times n$) $U' = A U$

La risposta alla domanda ② è sì $\Leftrightarrow$ tutti gli autov. hanno parte reale < 0

La risposta alla domanda ① è sì $\Leftrightarrow$ tutti gli autov. hanno parte reale ≤ 0 e quelli con parte reale $= 0$ hanno mult. = 1.

ANALISI 2

LEZIONE 123

Titolo nota

04/05/2016

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$u' = Au$$

 $\uparrow$
matrice $n \times n$ Stabilità. Si osserva che $u(t) \equiv 0$ è soluzione

- L'origine è **STABILE** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |u(0)| \leq \delta \Rightarrow |u(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

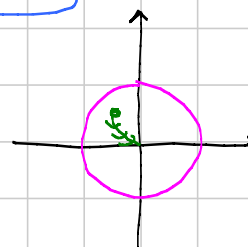
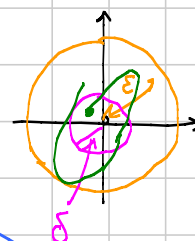
(se punto vicino a 0, resto vicino a 0)

- L'origine è **ASINTOTICAMENTE STABILE** se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |u(0)| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$$

(se punto vicino a 0, tende all'origine)

Oss. Asint. stabile $\Rightarrow$ stabile
 $\nLeftarrow$



Teorema 1 L'origine è asintoticamente stabile (cioè tutte le soluz., vicine o lontane, tendono a 0) se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0 .

Dim. Possiamo pensare A in forma di Jordan.

- per gli autov. reali con blocco da 1 si risolve esplicitamente
- per gli autov. $\alpha \pm i\beta$ $\leadsto$ blocco 2×2 $\leadsto$ passo in coord. polari e ottengo $\dot{\rho} = -\alpha\rho$, $\dot{\theta} = -\beta$
- per gli autov. con molt. alg. $>$ molt. geom. è un po' più complicato e saltano fuori $t, t^2, \dots$ (vedi les. preced.)

Teorema 2 L'origine è stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale ≤ 0 e tutti quelli con parte reale $= 0$ hanno blocchi di Jordan tutti di dimensione 1.

Dim. energetica del teo. 1
con autoval. tutti reali e
con blocchi da 1

La matrice A è diagonalizzabile,
cioè

$$A = M^{-1} D M$$

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i > 0$$

$$\ddot{u} = A u = M^{-1} D M u$$

$$M \ddot{u} = D \underbrace{M u}_v \rightsquigarrow \ddot{v} = -D v.$$

Questo porta a definire $E(t) := \|M u(t)\|^2$. Allora

$$E'(t) = 2 \langle M u'(t), M u(t) \rangle = 2 \langle \underbrace{D M u(t)}_v, \underbrace{M u(t)}_v \rangle$$

$$\text{Osservo che } \langle D v, v \rangle = -\lambda_1 v_1^2 - \dots - \lambda_n v_n^2 \leq -\nu \|v\|^2$$

$\nu = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Quindi:

$$E'(t) \leq -2\nu E(t) \quad \forall t \geq 0$$

e di conseguenza

$$E(t) \leq E(0) e^{-2\nu t} \quad \forall t \geq 0$$

Questo dice che le soluzioni vanno a 0 esponenzialmente.

Notazione: funzioni come la $E(t)$ si chiamano
"energia", o funzioni di "Lyapunov"
"qualcosa che scende"

Oss. Se qualche λ_i fosse $= 0$, lo stesso ragionamento mi dice che $E'(t) \leq 0$, quindi $E(t)$ limitata, quindi l'origine è stabile.

Oss. La stessa dimostrazione funziona anche con autovalori $\alpha \pm i\beta$, purché i blocchi siano tutti 2×2 (la dim. è quella della def. prec. perché $E(t) = \rho^2$)

Esercizio Dimostrare in modo energetico il caso $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u' = -\lambda u + v \\ v' = -\lambda v \end{cases}$$

Euristica: cerco $E(t)$ del tipo $E(t) := u^2(t) + a v^2(t)$
↑
parametro da scegliere

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2u\dot{u} + 2a v\dot{v} = 2u(-\lambda u + v) + 2av(-\lambda v) \\ &= -2\lambda u^2 - 2a\lambda v^2 + 2uv \\ &\stackrel{\text{spero}}{\leq} -\varepsilon (u^2 + a v^2) = -\varepsilon E(t) \end{aligned}$$

Se riesco a trovare a ed ε positivi per cui vale ho che $E(t) \rightarrow 0$, quindi $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$ (esponenzialm.)

La speranza equivale a

$$(2\lambda - \varepsilon) u^2 + (2a\lambda - \varepsilon a) v^2 - 2uv \geq 0 \quad \begin{pmatrix} 2\lambda - \varepsilon & -1 \\ -1 & 2a\lambda - \varepsilon a \end{pmatrix}$$

La forma quadratica è ≥ 0 se $2\lambda - \varepsilon > 0$ e

$$(2\lambda - \varepsilon)(2a\lambda - \varepsilon a) > 1 \quad 4a\lambda^2 + O(\varepsilon) > 1$$

Basta prendere $a = \frac{1}{\lambda^2}$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo e la cosa funziona

In bella considero $E(t) := u^2(t) + \frac{1}{\lambda^2} v^2(t)$ e vedo che tutto funziona ☺.

Problema : cosa succede quando il sistema non è lineare ?

Esempio
$$\begin{cases} u' = \arctan u - \sin v \\ v' = \tan(u+2v) \end{cases}$$

L'origine è p.to stazionario ($u(t) = v(t) \equiv 0$ è soluzione)

È stabile ? È asint. stabile ?

Idea: linearizzo e spero che funzioni...

$$\begin{aligned} u' &= u - v \\ v' &= u + 2v \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

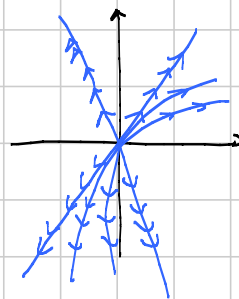
$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &> 0 \\ \text{Det}(A) &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ autovalori entrambi positivi $\Rightarrow$ asintotica instabilità

(cioè $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$)

(se giro il tempo, cioè considero $u(-t)$ e $v(-t)$, allora la matrice cambia il segno degli autovalori)

Mi aspetto soluzioni



Teorema di linearizzazione

(enunciato brutale)

Sotto certe ipotesi le soluzioni del sistema non lineare si comportano come quelle del linearizzato.

Ipotesi: tutti gli autovalori del linearizzato hanno parte reale $\neq 0$.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 124

Titolo nota

04/05/2016

Teorema di Linearizzazione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un intorno dell'origine, e sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 tale che $F(0) = 0$.

Consideriamo il sistema $u' = F(u)$ per il quale l'origine è un pto stazionario.

Sia A la matrice $n \times n$ tale che

$$F(u) = Au + R(u)$$

↑ matrice jacobiana di f nell'origine.

con $|R(u)| = o(|u|)$ per $u \rightarrow 0$.

Supponiamo che tutti gli autov. di A abbiano parte reale $\neq 0$

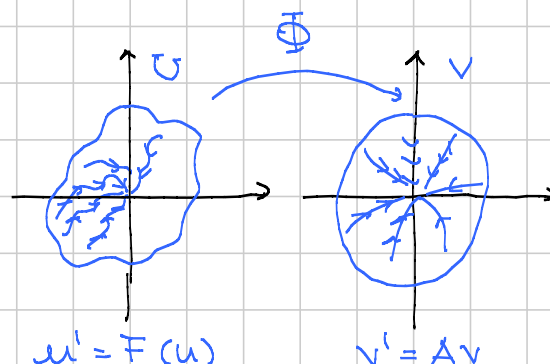
Allora le soluzioni di $u' = F(u)$ si comportano come le solus. di $v' = Av$.

Detto meglio esistono 2 intorni dell'origine U e V , ed esiste

$$\Phi: U \rightarrow V$$

omeomorfismo (continua ma non necessariamente C^1) tale

$$F(u) = \Phi^{-1}(A(\Phi(u))) \quad \forall u \in U$$



Oss. La dim. è per nulla banale e piuttosto recente (~1960)

Dim. di un caso speciale: A è diagonalizzabile e ha tutti gli autovalori reali negativi

Idea: cambio variabili in modo da diagonalizzare A .

wlog $A = \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$

Posso quindi riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\lambda_1 u_1 + R_1(u_1, \dots, u_n) \\ \dot{u}_2 &= -\lambda_2 u_2 + R_2(u_1, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n &= -\lambda_n u_n + R_n(u_1, \dots, u_n) \end{aligned} \quad \dot{u} = Du + R(u)$$

Considero $E(t) := u_1^2 + \dots + u_n^2 = \|u\|^2$. Allora

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \langle \dot{u}, u \rangle = 2 \langle Du + R(u), u \rangle \\ &= 2 \langle Du, u \rangle + 2 \langle R(u), u \rangle \end{aligned}$$

$$\leq -2\nu \|u\|^2 + 2 \langle R(u), u \rangle$$

costo $\nearrow$ $\downarrow$
 prec.

Uso che $\|R(u)\| = o(\|u\|)$. Esiste $\delta > 0$ t.c. $\|R(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|$
per ogni $\|u\| \leq \delta$

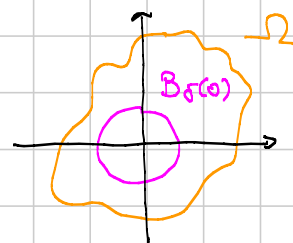
Ma allora

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -2\nu \|u\|^2 + 2|\langle R(u), u \rangle| \quad (\text{c.s.}) \\ &\leq -2\nu \|u\|^2 + \nu \|u\|^2 \\ &\leq -\nu \|u\|^2 = -\nu E(t) \\ &\quad \quad \quad - (2-\varepsilon)\nu \end{aligned}$$

$\leadsto E(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente, quindi le soluzioni con $E(0) \leq \delta^2$ tendono a 0 esponenzialmente $\Rightarrow$ asint. stabilità

Oss. La dimostrazione dice anche (cosa a priori non ovvia) che le soluzioni esistono globalmente

Se parto dentro $B_\delta(0)$ ci resto, quindi evito blow up e break down.



Esempio 1 Pendolo smorzato

$$\ddot{u} = -\sin u \quad (\text{pendolo vero})$$

$$\ddot{u} = -\sin u - \dot{u}$$

↑
attrito che frena
proporzionale alla
velocità

Lo trasformo in un sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\sin u - v \end{cases} \quad \text{linearizzato}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u - v \end{cases}$$

Senza attrito la lin. sarebbe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autov. } \pm i$$



e dal linearizzato non potrei dedurre nulla sul non lineare

In presenza di attrito la lin. in $(0,0)$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \text{Tr} < 0, \text{Det} > 0 \rightsquigarrow 2 \text{ autov. con parte reale negativa}$
 $\rightsquigarrow$ asintotica stabilità

$\rightsquigarrow$ le oscillazioni sono smorzate esponenzialmente.

Vediamo se sono reali o complessi e mettiamo un parametro all'attrito

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda - \delta \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\lambda - \delta) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \delta\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = \delta^2 - 4$$

• se $\delta > 2$ gli autov. sono reali

• se $\delta < 2$ gli autov. sono complessi



Riconsideriamo il sistema $u' = v$
 $\dot{v} = -\sin u - v$

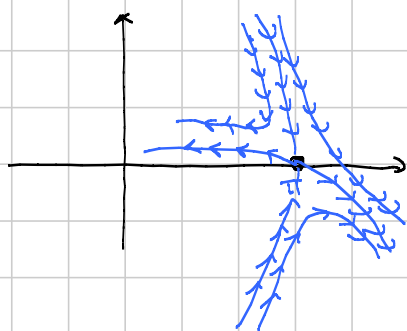
e osserviamo che anche $(\pi, 0)$ è stazionario. Linearizzo

$$u = \pi + w \quad \dot{w} = v$$

$$\dot{v} = -\sin(\pi + w) - v = \sin w - v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Tr} < 0 \quad \text{Det} < 0 \leadsto \text{autovalori reali } + -$$

$$\leadsto \text{comportamento "a sella"}$$



Esempio 2 $\begin{cases} \dot{u} = u - 3uv \\ \dot{v} = u + v \end{cases}$

P.ti stazionari: $\begin{cases} u(1-3v) = 0 \\ u+v = 0 \end{cases} \leadsto \begin{matrix} u=0 & v=0 \\ v = \frac{1}{3} & u = -\frac{1}{3} \end{matrix}$

Per studiare la stabilità basta linearizzare

$(0,0) \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \text{autovalori } 1, 1 \leadsto \text{asintotica instabilità}$

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad u = -\frac{1}{3} + w \quad \dot{w} = \dot{u} = -\frac{1}{3} + w - 3\left(-\frac{1}{3} + w\right)\left(\frac{1}{3} + z\right)$
 $v = \frac{1}{3} + z \quad \dot{z} = \dot{v} = -\frac{1}{3} + w + \frac{1}{3} + z$

$$\dot{w} = \cancel{w} + z - \cancel{w} + \text{termine } zw \text{ che ignoro}$$

$$\dot{z} = w + z$$

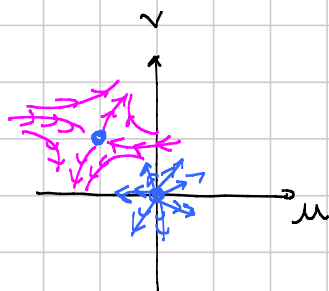
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} > 0$$

$$\text{Det} < 0$$

$\Rightarrow$ Autovalori reali $+$ $-$

$\Rightarrow$ comportamento di tipo sella



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 125

Titolo nota

11/05/2016

MODELLO PREDA - PREDATORI

Equazione Logistica

$$y' = ay$$

 y = numero di individui

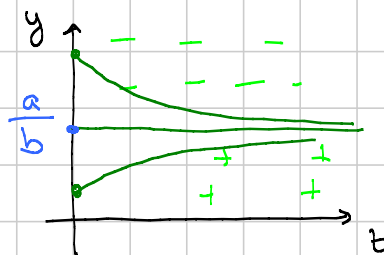
 a = tasso di crescita
(riproduzione) $a > 0$

$$y(t) = y(0) e^{at}$$

crescita esponenziale

$$y' = y(a - by) = ay - by^2$$

Eq. logistica

↑
tasso di
riproduzione↑
fastidio di essere
in tanti $a > 0, b > 0$ 

MODELLO VOLTERRA - LOTKA

(Preda - predatore)

$$\begin{cases} u' = u(a - bu) \\ v' = v(-c + du) \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

 u = prede v = predatori

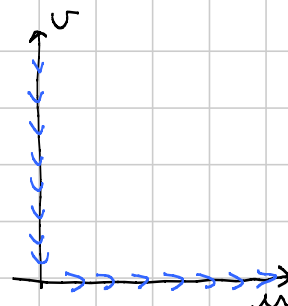
Fatto 1 Se $u(0) = 0$, allora $u(t) = 0$ sempre
 Se $v(0) = 0$, allora $v(t) = 0$ sempre

Infatti, se $u(0) = 0$, allora una soluz. è $u(t) \equiv 0$
 Analog., se $v(0) = 0$, allora una soluz. è $v(t) = v(0) e^{-ct}$

$$v(t) \equiv 0$$

$$u(t) = u(0) e^{at}$$

Se parto con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ non posso
 finire sugli assi per unicità



Fatto 2 Non si può avere blow-up in tempo finito
(quindi esistenza globale)

Sappiamo che per $u(0) > 0$ e $v(t) > 0$ le soluzioni si mantengono positive. Quindi

$u'(t) \leq au(t) \Rightarrow u(t)$ non ha blow up $\Rightarrow$ la seconda eq. diventa

$$v' = v \left(\underbrace{-c + du(t)}_{d(t) \text{ che esiste glob.}} \right)$$

$\Rightarrow$ se penso l'eq. come lin. in v la solus. esiste glob.

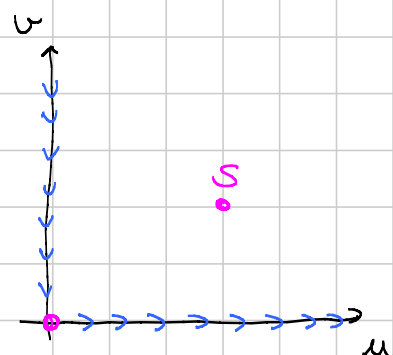
Fatto 3 Punti stat. del sistema.

$$\begin{cases} u(a-bv) = 0 \\ v(-c+du) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{c}{d} \\ v = \frac{a}{b} \end{cases}$$

S



Sono stabili?

$$(0,0) \rightsquigarrow \begin{cases} u' = au \\ v' = -cv \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autov. } \pm \rightsquigarrow \text{sella}$$

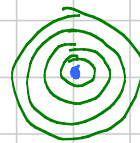
$$\text{Studio S: } u = \frac{c}{d} + R \quad v = \frac{a}{b} + k$$

$$\begin{aligned} R' = u' &= \left(\frac{c}{d} + R \right) (\cancel{a} - \cancel{a} - bk) = -\frac{bc}{d} k \\ k' = v' &= \left(\frac{a}{b} + k \right) (\cancel{-c} + \cancel{c} + dR) = \frac{ad}{b} R \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} > 0 \Rightarrow$ le soluzioni, se fossero reali, sarebbero $\neq 0$, ma non va bene con $\text{Tr} = 0 \Rightarrow$ Sono immaginarie pure

$\Rightarrow$ non posso applicare il te. di linearizzazione.

Se fosse lineare, le soluzioni "ruoterebbero intorno al punto".



FATTO 4 Le soluzioni con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ sono periodiche (cerchietti nello spazio delle fasi)

Metodo energetico: cerco $E(u, v)$ definita in $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ tale che

$$E(u(t), v(t)) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

$\uparrow$ dip. dal dato iniziale.

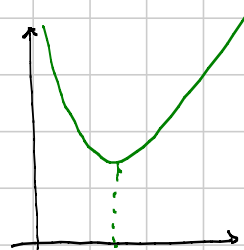
$$\begin{aligned} 0 &= [E(u, v)]' \stackrel{\text{chain rule}}{=} E_u(u, v) \dot{u} + E_v(u, v) \dot{v} \\ &= E_u(u, v) u(a - bv) + E_v(u, v) v(-c + du) \end{aligned}$$

Divido per uv (posso perché...)

$$0 = E_u(u, v) \underbrace{\left(\frac{a}{v} - b\right)}_{-E_v} + E_v(u, v) \underbrace{\left(-\frac{c}{u} + d\right)}_{E_u}$$

$$E(u, v) = \underbrace{du - c \log u}_{f(u)} + \underbrace{bv - a \log v}_{g(v)} \quad \text{funzione !!}$$

Si verifica che $E(u, v)$ è convessa nel 1° quadrante, con minimo proprio in S .

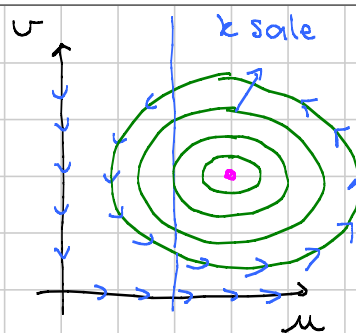


Si vede che le linee di livello sono curve intorno ad S

$$E(u, v) = K$$

— o — o —

Preda - predatore con autolimitazione



$$\begin{aligned} u' &= u(a - bv - \varepsilon u) \\ v' &= v(-c + du - \delta v) \end{aligned} \quad \varepsilon, \delta = \text{autolimitazione}$$

Come prima fatto 1, 2.

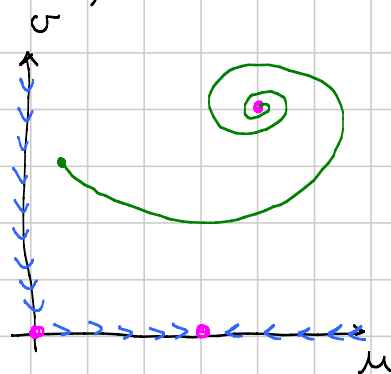
I punti stazionari sono $(0,0)$ e la solus. S di

$$\begin{cases} a - bv - \varepsilon u = 0 \\ -c + du - \delta v = 0 \end{cases} \rightsquigarrow (u_0, v_0) = S$$

[In realtà ce ne sono altri 2 con una sola var. nulla]

Linearizzando si vede (esercizio) che in S gli autovalori hanno parte reale negativa
 $\Rightarrow S$ è asintoticamente stabile (se punto vicino, tende ad S)

Fatto nuovo Tutte le solus. con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ tendono ad S .



Metodo energetico: cerco $E(u, v)$ che ha minimo in S e decresce lungo le soluzioni.

$$E(u, v) = d(u - u_0 \log u) + b(v - v_0 \log v)$$

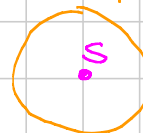
$$E_u = 1 - \frac{u_0}{u} \quad E_v = 1 - \frac{v_0}{v} \rightsquigarrow \text{minimo è in } (u_0, v_0)$$

$$\begin{aligned}
[E(u,v)]' &= d \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) \dot{u} + b \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \dot{v} \\
&= d \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) u (a - b v - \varepsilon u) + b \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) v (-c + d u - \delta v) \\
&= d (u - u_0) (\cancel{a - b(v - v_0) + b v_0} - \varepsilon (u - u_0) - \cancel{\varepsilon u_0}) \\
&\quad + b (v - v_0) (\cancel{-c + d(u - u_0) + d u_0} - \delta (v - v_0) - \cancel{\delta v_0}) \\
&= -\varepsilon d (u - u_0)^2 - \delta b (v - v_0)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Perché $E(u,v) \rightarrow \text{minimo}$ (quindi $(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)$)?

$$E(u,v) \rightarrow E_0 \neq \min$$

$$E(u,v) = E_0$$



$\Rightarrow$ Soluzioni fuori dalla linea di livello E_0

$$\Rightarrow \varepsilon d (u - u_0)^2 + \delta b (v - v_0)^2 \geq c > 0$$

$\Rightarrow E' \leq -c \Rightarrow E(t) \rightarrow -\infty$ il che è impossibile.

ANALISI 2 — LEZIONE 126

Titolo nota

11/05/2016

Due specie in competizione

$$\begin{aligned} u' &= u(a - Au - \alpha v) \\ v' &= v(b - Bv - \beta u) \end{aligned} \quad \text{parametri positivi}$$

Fatto 1 Le soluzioni con $u(0) \geq 0$ e $v(0) \geq 0$ rimangono nel I quadrante

Dim. Come in VL "gli assi sono soluzioni", quindi per unicità ...

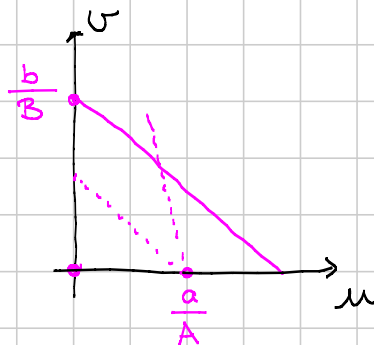
Fatto 2 Esistenza globale per $t \geq 0$ (sempre se $u(0) \geq 0$ e $v(0) \geq 0$)

Dim. $u' \leq au \Rightarrow$ no blow up $\Rightarrow$ esist. globale.
 $v' \leq bv$

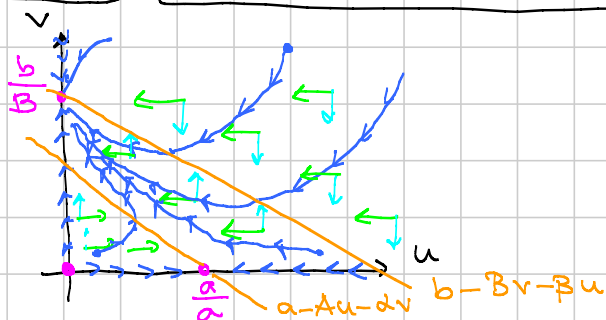
Fatto 3 P.ti stazionari sono 4: $(0,0)$, $(0, \frac{b}{B})$, $(\frac{a}{A}, 0)$

più la soluzione S di $a - Au - \alpha v = b - Bv - \beta u = 0$

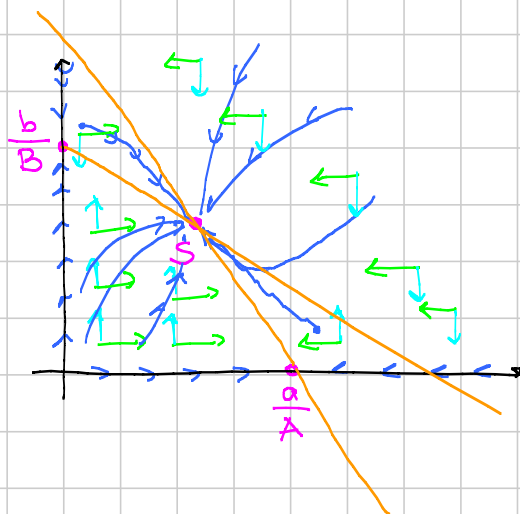
S può essere o meno nel I quadrante.



Caso 1 S non è nel I quadr



Qualunque sia il dato iniziale u si estingue e v tende al suo livello di equilibrio.

Caso 2 S è nel 1° quadrante

S è un pto asintoticamente stabile

Caso 3Come sopra, ma con $\frac{b}{B}$ e $\frac{a}{A}$ "esterni"

Qualitativamente il disegno è quello a sx.

Facendo i conti e linearizzando, ci aspettiamo S di tipo sella, quindi autos. reali $+$ $-$ e la direzione di avvicinamento corrisponde all'autovettore dell'autovalore negativo.

EPIDEMIA SIS

(RAFFREDDORE)

→ non si muore

→ non si diventa immuni

→ si "attacca"

 M = malati S = sani

$$M' = \underbrace{-aM}_{\substack{\downarrow \\ \text{qualcuno} \\ \text{guarisce}}} + \underbrace{bMS}_{\substack{\uparrow \\ \text{interazione} \\ \text{sani-malati}}}$$

$$S' = aM - bMS \rightarrow \text{non si muore, quindi } M+S = \text{cost}$$

$$M+S = T \quad (\text{totale}) \quad \leadsto \quad S = T-M$$

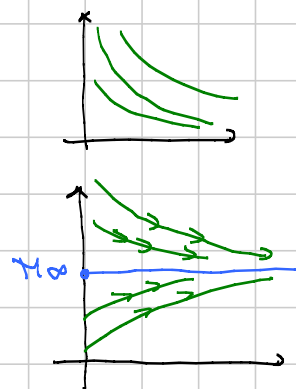
$$\leadsto \quad M' = -aM + bM(T-M) = (-a+bT)M - bM^2$$

Il segno - davanti a M^2 garantisce esistenza globale nel futuro se $M(0) \geq 0$.

Il comport. asint. dipende dal segno di $-a+bT$

• se $-a+bT < 0 \quad M(t) \rightarrow 0$

• se $-a+bT > 0 \quad M(t) \rightarrow \frac{-a+bT}{b} = M_{\infty}$



EPIDEMIA SIR Sani Infetti Rip.

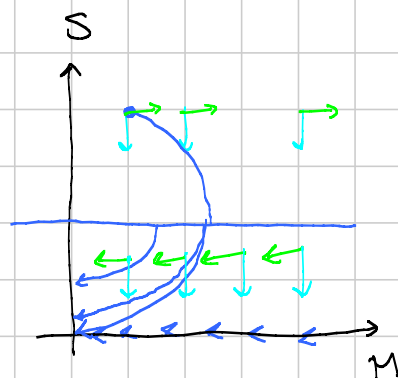
→ si muore o si diventa immuni

→ si attacca

$$\begin{aligned} M' &= -aM + bMS = M(-a+bS) \\ S' &= -bMS \end{aligned}$$

Soluzioni globali come prima

Si salva qualcuno?



Metodo energetico $E(M,S)$

$\downarrow$ Höpfe

$$0 = [E(M,S)]' = E_M (-aM + bMS) - E_S bMS$$

Divido per MS :

$$0 = E_M \left(-\frac{a}{S} + b \right) - E_S \underset{\substack{\uparrow \\ E_M}}{b}$$

Una E che funziona è

$$E(M, S) = bM + bS - a \log S = \text{costante}$$

Quindi $E(M, S)$ è costante lungo le traiettorie, quindi $S(t)$ non può tendere a 0.

Per capire la forma delle traiettorie, pensata come flusso su $M(S)$, posso fare il brutale

$$\frac{dM}{dt} = -aM + bMS$$

$$\frac{dS}{dt} = -bMS$$

$$\leadsto \text{divido} \leadsto \frac{dM}{dS} = + \frac{a}{bS} - 1 \leadsto M(S) = \frac{a}{b} \log S - S + C$$

(stessa cosa ottenuta
con l'energia)

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 127

Titolo nota

12/05/2016

Esercizio $\ddot{u} = -u^2$

$$\ddot{u} = -u^2$$

 $\ddot{u} = f(u) \leadsto$ metodo energ.

$$\ddot{u} \dot{u} = -u^2 \dot{u} \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{3} u^3 \right]'$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{3} u^3 = k}_{E(u, \dot{u})} \quad (\text{costante che dipende solo dai dati iniziali})$$

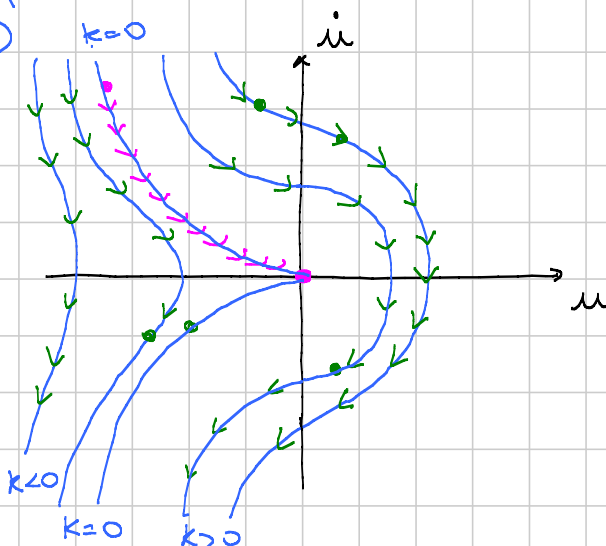
Le traiettorie nello spazio delle fasi "vivono" sulle linee di livello di $E(u, \dot{u})$

$$u^3 = k - \frac{3}{2} \dot{u}^2$$

$$u = \sqrt[3]{k - \frac{3}{2} \dot{u}^2}$$

$$k=0 \quad u = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \dot{u}^{\frac{2}{3}}$$

$$k < 0 \quad k > 0$$



$$\ddot{u} \leq 0 \Rightarrow \dot{u} \text{ va in giù}$$

Domande: La linea di livello

viene percorsa tutta?

Se viene percorsa tutta, c'è esistenza globale oppure blow-up?

→ Mettiamo di partire con $\dot{u}(0) < 0$. Dall'equazione deduciamo che $\dot{u}(t) < 0$ finché la soluz. esiste nel futuro. Quindi

$$\dot{u} = -\sqrt{2k - \frac{2}{3}u^3} \Rightarrow \text{Blow up in tempo finito} \\ \text{perché } \dot{u} \sim -u^{3/2}$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{3} u^3 = k = \frac{1}{2} \dot{u}(0)^2 + \frac{1}{3} u(0)^3$$

Mi serve che l'argomento della radice sia ≥ 0 . Ora all'inizio lo è e poi u va decrescendo, quindi l'argomento della radice aumenta!

Quindi: le soluz. con $\dot{u}(0) < 0$ hanno blow-up in un tempo finito T

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = -\infty \quad \lim_{t \rightarrow T^-} \dot{u}(t) = -\infty$$

→ Mettiamoci ora nel caso $\dot{u}(0) > 0$. Per un po' la cond. si mantiene, quindi

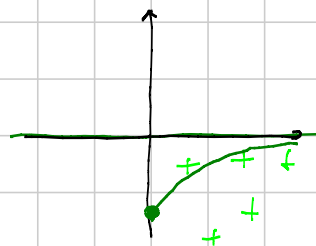
$$\dot{u} = \sqrt{2k - \frac{2}{3}u^3}$$

Se ad un certo punto la radice si annulla, cadiamo nel caso precedente.

$$\boxed{k=0} \quad \dot{u} = \sqrt{-\frac{2}{3}u^3} = \sqrt{\frac{2}{3}} |u|^{3/2}$$

e le soluzioni di questa tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$

Oss. Il RHS è lip. in u localmente, quindi $u(t) \equiv 0$ non può essere attraversata, quindi $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$



$$\boxed{k > 0} \quad \ddot{u} = \sqrt{2k - u^3} \quad u = \sqrt[3]{2k}$$

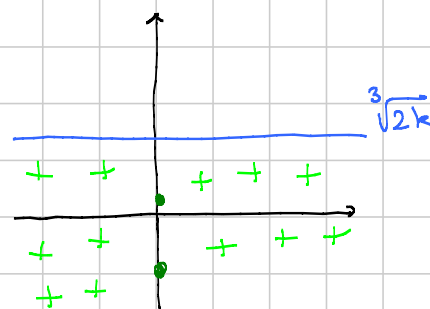
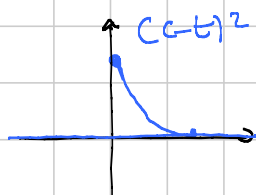
Le soluzioni arrivano in un tempo finito?

E' come risolvere $\ddot{u} = -\sqrt{u}$

$$\frac{\ddot{u}}{\sqrt{u}} = -1$$

$$2\sqrt{u} = c - t$$

$$4u = (c - t)^2$$



Tornando al caso vero posso risolvere... $\frac{\ddot{u}}{\sqrt{2k - u^3}} = 1$

L' integrale al LHS converge $\Rightarrow$ le soluzioni arrivano in un tempo finito a $\sqrt[3]{2k}$.

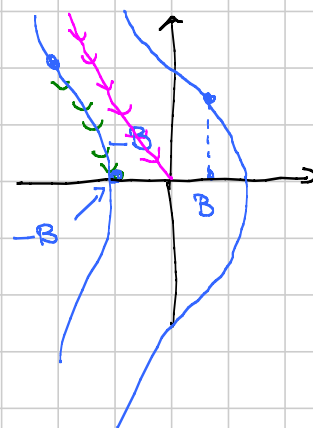
Altra dimostrazione dello stesso fatto:

Sulla curva $u(t) \leq -B \Rightarrow u(t)^2 \geq B^2$

$$\Rightarrow \ddot{u}(t) = -u(t)^2 \leq -B^2$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(0) + \int_0^t \ddot{u}(s) ds$$

$\Rightarrow \dot{u}$ si annulla in un tempo finito



Conclusione: tutte le traiettorie hanno blowup tranne una.

Meglio: per ogni $a \leq 0$ esiste unico $b \geq 0$ tale che il pbm con dati $u(0) = a$, $\dot{u}(0) = b$ ha soluz. globale

— o — o —

BUCA DI POTENZIALE**POTENTIAL WELL**

$$\ddot{u} = -u + u^3$$

$$\ddot{u} = -u$$

$$\ddot{u} = u^3$$

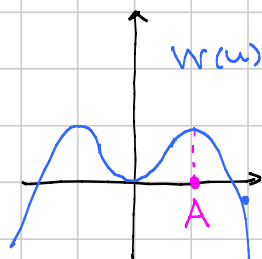
solus. periodiche

blow up probabile

Metodo energetico:

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4}_{W(u)} = K$$

$$E(u, \dot{u})$$



Le linee di Livello dipendono da K

L'origine è soluzione stazionaria.
Vicino all'origine le linee di Livello sono come quelle di

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = K$$

e queste corrispondono a traiettorie periodiche ($\ddot{u} = -u$)

Per livelli corrispondenti a K grandi le linee di Livello cambiano forma. Le traiettorie hanno blow up in un tempo finito con la stessa d.m. dell'esempio precedente

$$\dot{u} = -\sqrt{K + \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{2} u^2} \sim -u^2 \Rightarrow \text{blow up in tempo finito}$$

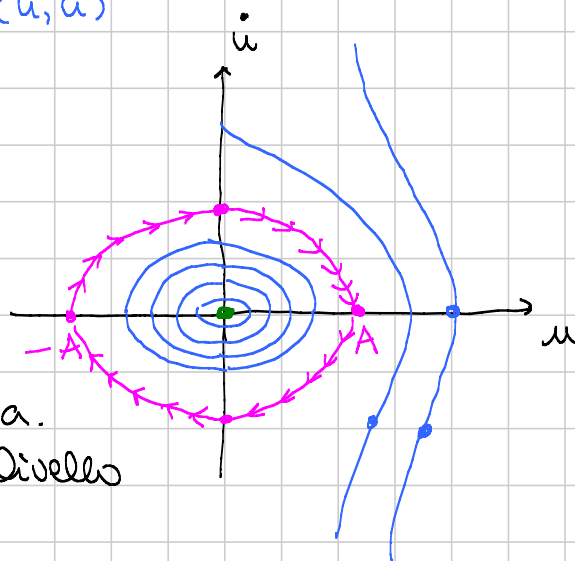
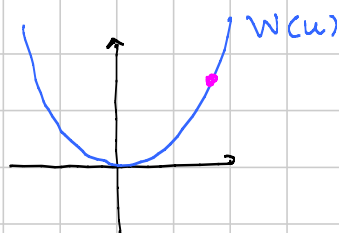


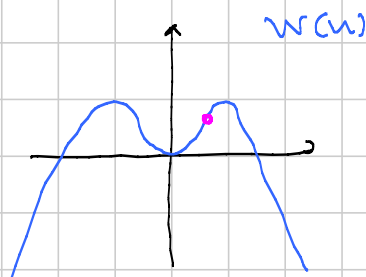
Immagine mentale

$$\ddot{u} = -u$$

$$W(u) = \frac{1}{2} u^2$$



$$\ddot{u} = -u + u^3$$



Congettura: anche da fuori ci sono soluzioni (anzi una sola) che portano sul max del potenziale

ANALISI 2

-

LEZIONE

128

Titolo nota

12/05/2016

Convergenza dominata

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \text{ unif. su } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$$

Versione per integrali impropri

Teorema (Convergenza dominata DISCOUNT)

continue

Sia $A \in \mathbb{R}$, sia $f_n: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni,
 sia $f_\infty: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. sui compatti(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \geq A$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ (iii) $\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f_n(x) dx = \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx$$

esistono per ogni $n \in \mathbb{N}$
 grazie a (ii) + (iii) + assol. int.

Dim. Uso la def. di limite, dopo aver osservato che anche $f_\infty(x)$ è integrabile in senso improprio per lo stesso motivo delle $f_n(x)$.

Idea

$$\int_A^{+\infty} f_n(x) dx = \int_A^B f_n(x) dx + \int_B^{+\infty} f_n(x) dx$$

① Mi viene dato $\varepsilon > 0$

② Scelgo $B > A$ in maniera tale che

$$\int_B^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

(posso per l'ipotesi (i))

③ Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{B-A} \quad \forall x \in [A, B], \forall n \geq n_0$$

(posso per l'ipotesi (i))

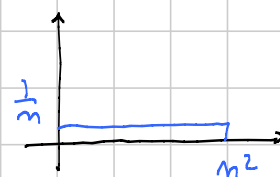
④ Dico che $\left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx - \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{+\infty} f_n - \int_A^{+\infty} f_\infty \right| &\leq \left| \int_A^B f_n - \int_A^B f_\infty \right| + \left| \int_B^{+\infty} f_n - \int_B^{+\infty} f_\infty \right| \\ &\leq \int_A^B |f_n - f_\infty| dx + \int_B^{+\infty} |f_n| + \int_B^{+\infty} |f_\infty| \\ &\leq (B-A) \frac{\varepsilon}{2(B-A)} \leq \frac{1}{4} \varepsilon \leq \frac{1}{4} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Oss. Senza la convergenza dominata (ipotesi (ii) + (iii))
l'enunciato è falso.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{se } x > n^2 \end{cases}$$



$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ unif su } \mathbb{R} \quad \text{ma} \quad \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow +\infty.$$

Integrale di Dirichlet

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Idea: considero la funzione

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

Fatti da dimostrare:

- ① $F(\lambda)$ è definita per ogni $\lambda \geq 0$
- ② $F(\lambda)$ è continua in $[0, +\infty)$ e $F(0) = D$
- ③ $F(\lambda) \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$
- ④ $F(\lambda)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ e $F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}$

Dati per buoni i fatti, allora

- ④ $\Rightarrow F(\lambda) = k - \arctan \lambda$ per un opportuno k
- ③ $\Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$
- ② $\Rightarrow D = \frac{\pi}{2}$.

Dim. ③ Segue dalla convergenza dominata

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x}$$

Per $\lambda \geq 1$ abbiamo che $|f_\lambda(x)| \leq e^{-\lambda x} \leq \underbrace{e^{-x}}_{g(x)}$

e inoltre $f_\lambda(x) \rightarrow 0$ uniformemente in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$. Infatti

$$|f_\lambda(x)| \leq e^{-\lambda x} \leq \underbrace{e^{-\lambda A}}_{\downarrow 0 \text{ se } A > 0} \quad \text{per ogni } x \geq A$$

Come prima

$$\int_0^{+\infty} = \underbrace{\int_0^A}_{\text{piccolo se } A \text{ è piccolo}} + \underbrace{\int_A^B}_{\text{piccolo se } B \text{ è grande unif. in } \lambda} + \int_B^{+\infty}$$

piccolo se λ è grande.

Dim. ① Quella classica per $\lambda = 0$ Se $\lambda > 0$ vale pure l'assoluta integrabilitàDim. ② Quello che crea problemi è il limite per $\lambda \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

NON POSSO USARE SUBITO LA CONV. DOMINATA.

Devo fare l'int. per parti come ad analisi 1:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x} \sin x dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx}_{\downarrow \text{ per conv. unif. }} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{e^{-\lambda x}}{x} \sin x dx &= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{x} (-\cos x) \right]_1^B + \int_1^B \cos x \frac{-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}}{x^2} dx \\ &= -\frac{e^{-\lambda B} \cos B}{B} + e^{-\lambda} \cos 1 - \int_1^B \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} \cos x dx \end{aligned}$$

Mando $B \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x} \sin x dx = e^{-\lambda} \cos 1 \overset{\substack{\uparrow \\ \cos 1 \text{ per } \lambda \rightarrow 0}}{-} \int_1^{+\infty} \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} \cos x dx$$

Per d'integrare $\int_1^{+\infty} \dots \cos x \, dx$ posso usare la conv. dominata

$$\left| \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} \cos x \right| \leq \frac{\overbrace{|\lambda x e^{-\lambda x}|}^{\leq \max_{t>0} t e^{-t}} + \overbrace{|e^{-\lambda x}|}^{\leq 1}}{\underbrace{\phantom{|\lambda x e^{-\lambda x}| + |e^{-\lambda x}|}}_{x^2}}$$



$$\leq \frac{c}{x^2} = g(x)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{\dots}{x^2} \cos x \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$$

Dall'analisi 1: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$

ANALISI 2 - LEZIONE 129

Titolo nota

13/05/2016

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

Già visto : 1 - $F(\lambda)$ è definita in $[0, +\infty)$ 2 - $F(\lambda) \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$ 3 - F è continua in $[0, +\infty)$ Da vedere : 4 - F è derivabile in $(0, +\infty)$ e $F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}$

$$\text{Già visto : } 1+2+3+4 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \frac{\pi}{2}$$

Vorrei tanto poter scambiare derivata e integrale

$$F'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

$$\stackrel{\text{teo. scambio}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} \sin x e^{-\lambda x} dx$$

questo si calcola con 2 passaggi x parti + grande ritorno

Integrali dip. da parametro già visti su un intervallo. Ora senno impropri.

Teorema (Derivazione di un integrale improprio dipendente da parametro - Low cost)Sia $A \in \mathbb{R}$, sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia

$$f: \underbrace{(a, b)}_{t} \times \underbrace{[A, +\infty)}_{x} \rightarrow \mathbb{R}$$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b)$$

Supponiamo che

(i) f sia continua in $(a,b) \times [A, +\infty)$

(ii) f_t " " " " "

(iii) esiste $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq A$$

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

(iv) $|f_t(t, x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq A$ (posso prendere la stessa $g(x)$ o una diversa)

Allora φ è derivabile in (a,b) e vale

$$\varphi'(t) = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b).$$

Oss. L'ipotesi essenziale è la (iv) cioè una DOMINAZIONE UNIFORME della derivata.

Dim. Prendo $t_0 \in (a,b)$ e faccio il rapp. increment. (wlog $R > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t_0+R) - \varphi(t_0)}{R} &= \int_A^{+\infty} \frac{f(t_0+R, x) - f(t_0, x)}{R} dx \\ &= \int_A^{+\infty} f_t(t_0 + c(R, x), x) dx \end{aligned}$$

$0 < c(R, x) < R$

Dico che questo tende a $\int_A^{+\infty} f_t(t_0, x) dx$

Fisso $\varepsilon > 0$, e faccio vedere che per R piccolo la diff. è $\leq \varepsilon$.

$$\left| \int_A^{+\infty} f_t(t_0 + c(R, x), x) dx - \int_A^{+\infty} f_t(t_0, x) dx \right| \leq \dots$$

$$\begin{aligned}
&\leq \dots \int_A^B |f_t(t_0 + c(R, x), x) - f_t(t_0, x)| dx & I_1 \\
&+ \int_B^{+\infty} |f_t(t_0 + c(R, x), x)| dx & I_2 \\
&+ \int_B^{+\infty} |f_t(t_0, x)| dx & I_3
\end{aligned}$$

Nell'ordine

$$\rightarrow \text{Fisso } B > A \text{ t.c. } \int_B^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad (\text{posso per hp su } g(x))$$

Da questo deduco che

$$I_2 \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad I_3 \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$\rightarrow$ Visto che ormai B è fissato, uso l'unif. cont. di f_t in $[t_0, t_0 + R] \times [A, B]$ (che è compatto) e ottengo un $R_0 > 0$ tale che

$$|f_t(t_0 + c(R, x), x) - f_t(t_0, x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{B-A}$$

$$\forall x \in [A, B] \quad \forall R \in [0, R_0]$$

Da questo deduco che $I_1 \leq \frac{1}{2} \varepsilon$.

$$\text{Quindi } I_1 + I_2 + I_3 \leq \varepsilon.$$

— 0 — 0 —

Questo basta per concludere nell'esempio.

$$f(t, x) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \quad f_t(t, x) = \sin x e^{-tx}$$

Fisso $t_0 > 0$ e applico il teo.

$$0 \quad \frac{t_0}{2} \quad t_0 \quad \frac{3t_0}{2}$$

nell'intervallo $(\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2})$ dove vale la dominazione

$$|f_t(t, x)| \leq e^{-tx} \leq \underbrace{e^{-\frac{t_0}{2}x}}_{g(x)} \quad \forall t \in [\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}]$$

$\forall x \geq 0$

$g(x)$
integrabile.

Esempio 2

$$\varphi(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx \quad \forall t > 0$$

$$= \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} \leftarrow \text{onibile}$$

$$= \frac{1}{t}$$

$\varphi(t)$ è derivabile per il teorema di prima. Infatti $f(t, x) = e^{-tx}$

$$|f_t(t, x)| = |x e^{-tx}| \leq \underbrace{|x e^{-\frac{t_0}{2}x}|}_{g(x)} \quad \text{nella stessa zona di prima}$$

Derivando sotto il segno di integrale ottengo

$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} -x e^{-tx} dx = -\frac{1}{t^2}$$

Voleendo posso iterare (riapplicando il teo.)

$$\varphi''(t) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3}$$

e così via

$$\varphi^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}$$

Mettendo $t=1$ otteniamo

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!}$$

INTEGRALI DI FRESNEL

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx}_S = \underbrace{\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx}_C = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Idea che sta sotto: pensare a e^{-z^2} con $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{-z^2} &= e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2-y^2-2ixy} \\ &= e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) - e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) i \end{aligned}$$

Dim. Considero due forme differenziali

$$\omega_1 := \underbrace{e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) dx}_A + \underbrace{e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) dy}_B$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2y e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) - e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) 2x$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -2x e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) + e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) 2y$$

$$\omega_2 := e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) dx - e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) dy$$

... verifico che anche ω_2 è esatta.

Integro le 2 forme su un settore (bordo)

$$S_n: 0 \leq \rho \leq n, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$



$$0 = \int_{\partial S_n} \omega_1 = \int_{\partial_1} \omega_1 + \int_{\partial_2} \omega_1 + \int_{\partial_3} \omega_1$$

$$0 = \int_{\partial_1} \omega_2 + \int_{\partial_2} \omega_2 + \int_{\partial_3} \omega_2$$

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = \int_0^n e^{-t^2} dt$$

$\uparrow$
 $(t, 0)$

$$\int_{\gamma_1} \omega_2 = 0$$

$$\int_{\gamma_3} \omega_1 = \int_0^n \cos(t^2) + \sin(t^2) dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \gamma_3 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) : t \in [0, n]$$

$$\int_{\gamma_3} \omega_2 = \int_0^n \sin(t^2) - \cos(t^2) dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Supponiamo di sapere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_2 = 0$$

$$0 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1 + \int_{\gamma_3} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_2 + \int_{\gamma_2} \omega_2 + \int_{\gamma_3} \omega_2$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(C+S) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(S-C)$

$$\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

No: è $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ corretto dopo video

Dalla seconda otteniamo $S = C$. A questo punto dalla 1ª

$$0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} 2S \quad \leadsto \text{viene un segno sbagliato dovuto all'orientazione sbagliata di } \gamma_3.$$

C'è pure un $\sqrt{2}$ di troppo che va chiarito.

$\uparrow$ (colpa della posizione del 2 nell'integrale di e^{-t^2} : corretto dopo video)

ANALISI 2 -

LEZIONE 130

(ultima della parte ufficiale)

Titolo nota

13/05/2016

Fine del conto su integrali di Fresnel. Resta da dim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} w_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} w_2 = 0$$

$$\gamma_2 : (n \cos t, n \sin t) : t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Tutto si riduce ad integrali del tipo

$$n e^{-n^2(\cos^2 t - \sin^2 t)} \cdot \text{rota trigonometrica } dt$$

Quindi basta dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} n e^{-n^2(\cos^2 t - \sin^2 t)} dt = 0$$

↓
 0 puntualmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$
 (ma tende a +∞ in $t = \frac{\pi}{4}$)
 $\Rightarrow$ ADDIO CONV. unif.

$$\int_0^{\pi/4} n e^{-n^2(\cos^2 t - \sin^2 t)} dt = \int_0^{\pi/4} n e^{-n^2 \cos(2t)} dt = \frac{n}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \cos t} dt$$

$$(y = \frac{\pi}{2} - t) = \frac{n}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t} dt$$

Ci siamo ridotti a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t} dt$$

Provo a spezzare

$$n \int_0^{\pi/2} = n \int_0^{A_n} \dots + n \int_{A_n}^{\pi/2} \dots \quad A_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$= \underbrace{n \int_0^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \dots}_{I_1} + \underbrace{n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\pi/2} \dots}_{I_2}$$

Ora $I_1 = n \int_0^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \underbrace{e^{-\dots}}_{\leq 1} dt \leq n \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0$

$$I_2 = n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\pi/2} e^{-\dots} dt \leq n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\pi/2} e^{-n^2 \sin^2 \frac{1}{n\sqrt{n}}} dx$$

$$\leq n \frac{\pi}{2} e^{-n^2 \sin^2 \frac{1}{n\sqrt{n}}} \rightarrow 0$$

è come se fosse $n e^{-\sqrt{n}}$

— 0 — 0 —

WRONSKIANO

Esercizio Siano $a(t)$ e $b(t)$ due funzioni continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo l'eq. diff.

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

① Data una soluzione $u(t)$, che ovviamente esiste globalmente, allora

→ 0 $u(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

→ 0 l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : u(t) = 0\}$ non ha p.to di accumulazione.

Dim. Supponiamo che l'insieme degli zeri di $u(t)$ abbia un p.to di accumulazione $t_0 \in \mathbb{R}$. Allora (analisi 1)

$$u(t_0) = 0$$

$$u'(t_0) = 0$$

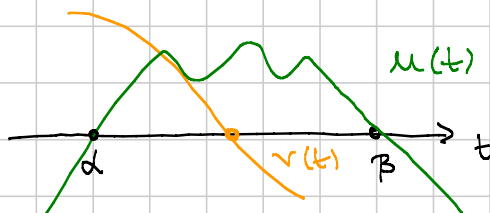
(vedi video)

⇒ per unicità $u(t) \equiv 0$.

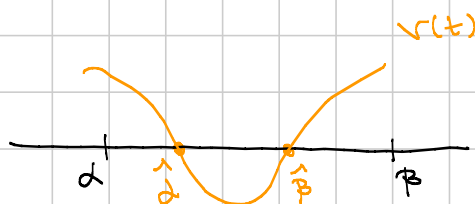
- ② Sia ora $u(t)$ una soluzione non identicamente nulla. Siano α e β due zeri consecutivi di $u(t)$, cioè $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ e $u(t) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Sia $v(t)$ un'altra soluzione non multipla di $u(t)$. Allora $v(t)$ si annulla esattamente una volta in (α, β) (TEOREMA DI OSCILLAZIONE)

Oss. Se dimostro che si annulla almeno una volta, allora automaticamente si annulla esattamente una volta.

Basta scambiare i ruoli di $u(t)$ e $v(t)$.



Dato $v(t)$, ogni altra soluz. non multipla quindi anche $u(t)$, dovrebbe annullarsi in $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.



Oss. Dove si annullano le soluz. non identicamente nulle cambiano segno (se non lo facessero avrebbero p.to di max/min, quindi derivata nulla).

Dim. tes. oscillazione Introduco il Wronskiano

$$W(t) := \text{Det} \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} = u\dot{v} - \dot{u}v$$

$$\begin{aligned} W'(t) &= [u\dot{v} - v\dot{u}]' = \cancel{\dot{u}\dot{v}} + u\ddot{v} - \cancel{\dot{v}\dot{u}} - v\ddot{u} \\ &= u(-a\dot{v} - b\dot{v}) - v(-a\dot{u} - b\dot{u}) \\ &= -a u\dot{v} - b u\dot{v} + a v\dot{u} + b v\dot{u} \\ &= -a(t) W(t) \end{aligned}$$

Quindi $w'(t) = -a(t) w(t)$ da cui

$$w(t) = w(0) e^{-A(t)} \quad \text{dove } A(t) = \int_0^t a(s) ds$$

Oss. fondamentale: $\rightarrow 0 \quad w(t) \equiv 0$

$\rightarrow 0 \quad w(t) \neq 0$ sempre e con lo stesso segno

$$w(\alpha) = - \underbrace{u(\alpha)}_{\neq 0} \underbrace{v(\alpha)}_{\neq 0}$$

$\neq 0, u$ e v sarebbe multipla di u
 $\uparrow$
 altrimenti $u \equiv 0$.

$$w(\beta) = -u(\beta) v(\beta)$$

Se v non si annullasse mai in $[\alpha, \beta]$, allora $v(\alpha)$ avrebbe lo stesso segno di $v(\beta)$, ma allora $u(\alpha)$ avrebbe lo stesso segno di $u(\beta)$, ma questo non è possibile.

Come già detto, v non può annullarsi in α e/o β perché sarebbe multipla di u , quindi si annulla in (α, β) .

— 0 —

DELIRIO Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Dico che $c \in \mathbb{R}$ è un valore critico se esiste $x \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(x) = c \quad \text{e} \quad \nabla f(x) = 0.$$

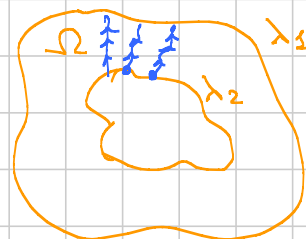
Consideriamo le linee di livello $\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = \lambda\} = L_\lambda$

Se $\lambda_1 < \lambda_2$ e L_{λ_1} non è omomorfa a L_{λ_2} , allora esiste un $c \in (\lambda_1, \lambda_2)$ critico.

Dem. Considero l'eq. diff. $\dot{u} = - \frac{\nabla f(u)}{|\nabla f(u)|^2}$

Se non ci sono livelli critici tra λ_1 e λ_2 , l'equazione è ben definita in Ω .

Allora per ogni dato in λ_2 esiste una soluzione.



$$[f(u)]' = \langle \nabla f(u), \dot{u} \rangle = \langle \nabla f(u), - \frac{\nabla f(u)}{|\nabla f(u)|^2} \rangle = -1$$

Quindi la soluzione u , pensata come funzione di t e del dato iniziale in L_{λ_2} , definisce unaomotopia tra L_{λ_2} e L_{λ_1} . La continuità in x è la dip. cont. dal dato iniziale.

