

A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 048. Definizione di curva e suo sostegno. Curve chiuse e semplici. Strategie per dimostrare la semplicità. Disegno di una curva piana. Vettore e retta tangente. Speed e velocity.	4
Lezione 049. Definizione di lunghezza di una curva e di curva rettificabile. Le curve Lipschitziane sono rettificabili. Integrali di funzioni vettoriali: stime dall'alto e dal basso. Formula per la lunghezza delle curve regolari: enunciato e prima dimostrazione (via stime su integrali vettoriali).	8
Lezione 050. Lunghezza di curve cartesiane o in coordinate polari. Esempi di calcolo di lunghezze curve. Discussione dell'indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione, sia nel caso regolare, sia nel caso solo continuo.	14
Lezione 051. Esempi di curve di lunghezza infinita. Integrale curvilineo: notazioni, significato geometrico, idea della definizione, formula per il calcolo. Baricentri di curve. Seconda dimostrazione della formula per la lunghezza di curve regolari (via teorema di Lagrange sulle componenti).	20
Lezione 052. Definizione di forma differenziale. Integrale di una forma differenziale su una curva: definizione ed interpretazione fisica. Commenti sui rapporti tra forme differenziali e campi di vettori.	25
Lezione 053. Differente comportamento dell'integrale curvilineo di una forma e di una funzione rispetto a riparametrizzazioni di una curva. Forme differenziali esatte. Caratterizzazione dell'esattezza in termini di integrali lungo curve.	30
Lezione 054. Forme differenziali chiuse. Esattezza implica chiusura. Insiemi convessi, stellati, connessi, semplicemente connessi. Le forme chiuse sono esatte negli aperti semplicemente connessi (enunciato).	36
Lezione 055. L'integrale di una forma chiusa su due curve omotope coincide (enunciato). Esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta. Come testare l'esattezza di una forma chiusa in un aperto non semplicemente connesso.	41
Lezione 056. Integrali dipendenti da un parametro: teoremi di continuità e derivabilità (derivazione sotto il segno di integrale). Esattezza delle forme chiuse negli aperti stellati.	46
Lezione 057. L'integrale di una forma chiusa su due curve omotope (mediante omotopia sufficientemente regolare) coincide. Quattro strategie per il calcolo dell'integrale di una forma lungo una curva: discussione ed esempi.	52

Lezione 058. Superfici nello spazio: definizione e primi esempi. Superfici cartesiane. Piano tangente e vettore normale. Formula per un vettore perpendicolare a due vettori dati (prodotto vettore).	57
Lezione 059. La retta tangente ad una curva su una superficie è contenuta nel piano tangente. Come non si definisce l'area di una superficie: esempio di Schwarz.	62
Lezione 060. Definizione di area di una superficie e modi equivalenti di scrivere la formula per il calcolo. Invarianza dell'area per riparametrizzazione. Caso speciale delle superfici cartesiane e di rotazione.	66
Lezione 061. Formule equivalenti per l'area di una superficie di rotazione. Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione. Integrali superficiali e integrali di flusso. Interpretazione delle formule di integrazione in coordinate polari/sferiche in termini di integrali curvilinei/superficiali.	71
Lezione 062. Gradiente, laplaciano, divergenza, rotore: definizioni e relazioni tra di esse. Significato di gradiente/divergenza/laplaciano nulli/uguali.	77
Lezione 063. Teorema di Gauss-Green e teorema della divergenza nel piano. Equivalenza tra le due formulazioni. Interpretazione del termine di bordo come integrale di flusso e come integrale di una forma differenziale.	82
Lezione 064. Applicazioni del teorema della divergenza: area ed integrale di funzioni su domini delimitati da curve date.	87
Lezione 065. Applicazioni del teorema della divergenza: calcolo di integrali di flusso. Laplaciano in coordinate polari e funzioni armoniche radiali.	92
Lezione 066. Dimostrazione del teorema della divergenza su insiemi normali. Idea euristica per dimostrare il teorema nel caso generale scomponendo il dominio e sfruttando le cancellazioni sui bordi interni.	97
Lezione 067. Partizioni dell'unità. Dimostrazione del teorema della divergenza nel caso generale.	102
Lezione 068. Orientazione del bordo di una superficie. Enunciato della formula di Stokes (teorema del rotore). Come determinare un vettore che ha per rotore un vettore dato.	107
Lezione 069. Quattro strategie per calcolare un integrale di flusso attraverso una superficie.	112
Lezione 070. Dimostrazione della formula di Stokes. Dimostrazione via Gauss-Green di un caso particolare (dimensione due, maggior regolarità su dominio, integranda, diffeomorfismo) del cambio di variabili negli integrali multipli.	117
Lezione 071. Giustificazione formale dell'algoritmo per trovare un vettore dato il suo rotore. Esempio di vettore a divergenza nulla che non è un rotore. L'integrale di un rotore su una superficie chiusa è nullo. Pull-back di forme differenziali.	122

Lezione 072. Spazi metrici, spazi di Banach, spazi di Hilbert: definizioni, motivazioni, esempi principali.	126
Lezione 073. Equivalenza tra continuità per successioni e continuità epsilon/delta in spazi metrici. Equivalenza di tutte le norme in dimensione finita. Definizione di limitatezza e totale limitatezza.	131
Lezione 074. Compattezza in spazi metrici: equivalenza tra compattezza per ricoprimenti, compattezza per successioni, e completezza più totale limitatezza.	136
Lezione 075. Lemma del raggio magico (numero di Lebesgue di un ricoprimento). Teorema di Heine-Cantor in spazi metrici. Criterio per dimostrare la totale limitatezza.	141
Lezione 076. Teorema delle contrazioni in spazi metrici. Completamento di uno spazio metrico: definizioni ed enunciato dei tre risultati principali (esistenza, unicità, estensione).	147
Lezione 077. Dimostrazione dei tre risultati principali sul completamento di spazi metrici.	152
Lezione 078. Teorema delle funzioni implicite: presentazione del problema, enunciato e dimostrazione nel caso di una equazione in due variabili, continuità e ulteriore regolarità della soluzione.	158
Lezione 079. Teorema delle funzioni implicite (una equazione in dimensione n). Calcolo del polinomio di Taylor di funzioni definite implicitamente. Limiti all'infinito di una funzione vs limitatezza del suo luogo di zeri.	162
Lezione 080. Teorema delle funzioni implicite (una equazione in dimensione 2): dimostrazione mediante punto fisso.	166
Lezione 081. Teorema delle funzioni implicite: caso generale (k equazioni in dimensione n).	170
Lezione 082. Teorema della funzione inversa (aka teorema di invertibilità locale). Teorema della mappa aperta.	174
Lezione 083. Moltiplicatori di Lagrange: dimostrazione mediante teorema di invertibilità locale (nel caso generale) e mediante esplicitazione del vincolo (nel caso di una sola equazione).	179
Lezione 084. Moltiplicatori di Lagrange: dimostrazione mediante esplicitazione del vincolo nel caso generale. Semicontinuità del rango di una matrice.	184
Lezione 085. Moltiplicatori di Lagrange: dimostrazione mediante penalizzazione del vincolo. Esercizi sull'invertibilità di mappe vettoriali.	189
Lezione 086. Moltiplicatori di Lagrange: condizione sufficiente per essere punto di massimo/minimo. Esercizi su funzioni implicite e funzioni inverse.	195

ANALISI 2 - LEZIONE 048

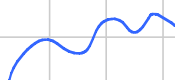
Titolo nota

18/11/2015

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

Def. Una CURVA è una funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 Si dice SOSTEGNO DELLA CURVA l'immagine di γ ,
 cioè

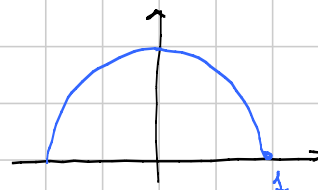
$$\{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Oss.  Quello che si disegna è il sostegno, ma lo stesso sostegno può provenire da parametrizz. diverse

Brutalmente, una curva è un modo di percorrere il sostegno.

Esempio 1 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$

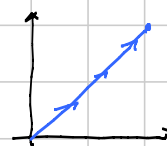
$$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



Sono due curve che hanno lo stesso sostegno.

Esempio 2 $\gamma_1(t) = (t, t) \quad t \in [0, 1]$

$$\gamma_2(t) = (t^2, t^2) \quad t \in [0, 1]$$



Stesso sostegno, stesso verso di percorrenza.

Esempio 3 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

Stesso sostegno, ma "numero di giri diverso".



Def. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- **CHIUSA** se $\gamma(b) = \gamma(a)$



- **SEMPLICE** se γ è iniettiva tranne al più agli estremi.

Detto in modo complicato

$$\forall t \in [a, b], \forall s \in [a, b] \quad \gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } t \in \{a, b\} \text{ e } s \in \{a, b\}$$

Come dimostro che una curva è semplice?

CASO FACILE Esiste almeno una componente monotona
 $\rightarrow$ la curva è semplice

$$\gamma(t) = (t^2 - 7 \sin t, \arctan t, e^{t^2}) \quad t \in [-7, 7]$$

$\uparrow$
 è monotona 😊

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow \arctan t = \arctan s \Rightarrow t = s$$

CASO INTERMEDIO Riesco a trovare una qualche quantità monotona

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad t \in [12, 127]$$

La distanza di $\gamma(t)$ dall'origine, cioè il ρ delle polari, è
 $\|\gamma(t)\| = t$ è monotono.

CASO GENERALE Provo a risolvere il sistema...

Esempio $\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 1]$

È chiusa perché $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0) \Rightarrow$ addio prime 2 opzioni

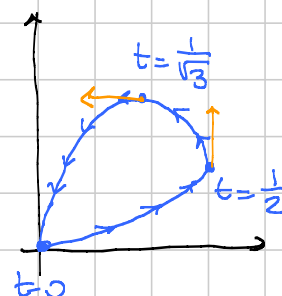
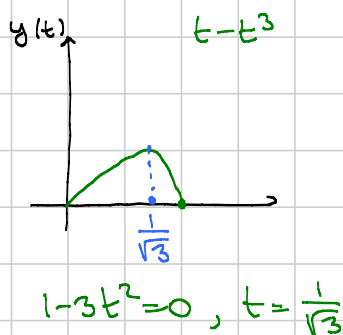
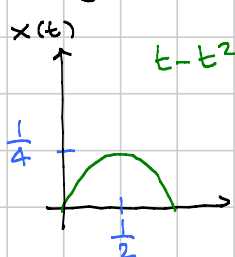
Imposto il sistema
$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t+s)(t-s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

Se $t=s$ sono contenuti. Altrimenti semplifico

$$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases} \quad \text{sostituzione, oppure} \quad \begin{cases} 1 = t^2+s^2+2ts \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases}$$

$$\leadsto ts=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow t=0 \leadsto s=1 \\ \searrow s=0 \leadsto t=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} \text{dalla 1ª eq.}$$

Disegno della curva Facciamo il grafico delle 2 componenti



$t \in [0, \frac{1}{2}] \leadsto x(t) \text{ e } y(t) \text{ crescono}$

$t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] \leadsto x(t) \text{ scende e } y(t) \text{ sale}$

$t \in [\frac{1}{3}, 1] \leadsto x(t) \text{ e } y(t) \text{ scendono}$

Def. Supponiamo che γ sia di classe C^1 . Allora si definisce retta tangente alla curva nel pto corrispondente a $t_0 \in [a, b]$ la retta di eq. parametrica

$$\underbrace{\gamma(t_0)}_{\uparrow \text{ vettori}} + t \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\uparrow}$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t_0)$ si dice VETTORE TANGENTE alla curva

Nell'esempio precedente

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (1-2t, 1-3t^2)$$

$$\dot{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\dot{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Oss. Il vettore tangente può essere nullo e in quel caso la retta tangente non è definita.

Oss. Il vettore tangente è la
 VELOCITY $\leadsto$ velocità vettoriale
 SPEED $\leadsto$ velocità scalare = $\|\dot{\gamma}(t)\|$
 — o — o —

aggiunto dopo video

ANALISI 2

—

LEZIONE 049

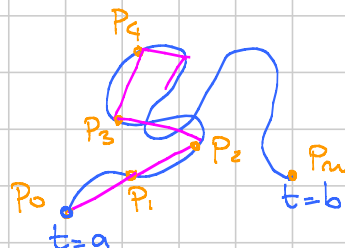
Titolo nota

18/11/2015

LUNGHEZZA DI UNA CURVASia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

Idea intuitiva: fisso dei tempi

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e vedo i corrispondenti punti $P_k = \gamma(t_k)$.

Li unisco con una spezzata di cui calcolo la lunghezza sommando le lunghezze dei segmenti.

Tutte le poligonali così ottenute intuitivamente hanno lunghezza minore della curva. Quindi si pone

$$\text{Lunghezza curva} = \sup. \text{lunghe. poligonali}$$

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Si definisce

$$\text{Lunghe}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\substack{\text{lunghe. segmento} \\ P_{k-1} P_k}} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

La lunghezza $\in [0, +\infty]$ può essere anche $+\infty$.

Brutalmente: la lunghezza della curva è quello che indica il contakm alla fine del percorso, quindi

TRATTI RIPETUTI CONTANO PIÙ VOLTE

Def. Una curva si dice rettificabile se ha lunghezza FINITA.

— o — o —

Prop 1 Le curve Lipschitziane sono rettificabili e

$$\text{lungh.} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost. di} \\ \text{Lip}}}{L} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lungh. intervallo}}}{(b-a)}$$

Dim. Per ipotesi γ è Lip., quindi

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq L |t-s| \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall s \in [a,b]$$

Fissati comunque $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, avremo

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^n L |t_k - t_{k-1}| = L (b-a)$$

$\uparrow$
telescopico

Quindi tutte le poligonali hanno lunghe $\leq L(b-a)$.

Teorema Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 . Allora γ è rettificabile e

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{speed}}} dt$$

spazio = integrale della speed rispetto al tempo.

PARENTESONA Integrale delle funzioni vettoriali

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme misurabile, essa $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Cosa vuol dire

$$\int_A f(x) dx$$

È il vettore che ha come componenti $\int_A f_i(x) dx$, dove

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Lemma 1 (stima dall'ALTO per integrale vettoriale)

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\| dx$$

Oss. Non segue banalmente da quello con il valore assoluto.

Dim. Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\langle v, \int_A f(x) dx \rangle = \sum_{k=1}^n v_k \int_A f_k(x) dx$$

$$= \int_A \sum_{k=1}^n v_k f_k(x) dx$$

$$= \int_A \langle v, f(x) \rangle dx$$

(i prodotti scalari
entrano negli
integr. vettoriali)

$$(C.S.) \leq \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\| dx$$

$$= \|v\| \int_A \|f(x)\| dx$$

Mettendo insieme LHS e RHS abbiamo ottenuto

$$\langle v, \int_A f(x) dx \rangle \leq \|v\| \int_A \|f(x)\| dx$$

Ora pongo

$$v = \int_A f(x) dx$$

e trovo

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x) dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\| dx$$

Semplifico e ho finito.

— o — o —

Lemma 2 (Stima dal BASSO per integrale vettoriale)

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

dove $x_0 \in A$ è un pto qualunque.

Dim.

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_A f(x_0) dx + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \\ &= \underbrace{\text{meas}(A) f(x_0)}_{v_1} + \underbrace{\int_A (f(x) - f(x_0)) dx}_{v_2} \end{aligned}$$

Per la triangolare

$$\|v\| \geq \|v_1\| - \|v_2\|$$

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \text{meas}(A) \|f(x_0)\| - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

uso Lemma 1 +
segno - davanti

$$\geq \text{meas}(A) \|f(x_0)\| - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

$$\geq \text{meas}(A) \|f(x)\| - \text{meas}(A) \|f(x) - f(x_0)\|$$

uso

$$\|f(x_0)\| \geq \|f(x)\| - \|f(x) - f(x_0)\| \quad - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Integro LHS e RHS su A . Ottengo

$$\begin{aligned} \text{meas}(A) \left\| \int_A f(x) dx \right\| &\geq \text{meas}(A) \int_A \|f(x)\| dx \\ &\quad - \text{meas}(A) \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \\ &\quad - \text{meas}(A) \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \end{aligned}$$

Semplifico $\text{meas}(A)$ e ho finito.

— o — o —

Dim. teorema

Fase facile: fisso $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Allora per ogni $k = 1, \dots, n$ uso Lemma 1 e ottengo

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \end{aligned}$$

Sommo su k e ottengo

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\text{lungh. poligonale}} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Facendo il sup su tutte le suddivisioni ottengo

$$\boxed{\text{lungh}(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.}$$

Fase meno facile. Ottenere la disug. opposta.

Fisso $\varepsilon > 0$, la $t \rightarrow \dot{\gamma}(t)$ è continua, quindi unif. cont., quindi prendo il δ corrispondente, cioè

$$|t-s| \leq \delta \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)\| \leq \varepsilon \quad t, s \in [a, b]$$

Ora prendo una qualunque suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ con tutti intervalli minori di δ , cioè $|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$.

Allora per il Lemma 2

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - 2 \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s_k)\| dt}_{\substack{\text{p.to a caso} \\ \text{in } [t_{k-1}, t_k] \\ \geq -2\varepsilon(t_k - t_{k-1})}} \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2\varepsilon(t_k - t_{k-1})$$

Sommando

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

e quindi

$$\text{lunga}(\gamma) \geq \int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario è finita

— o — o —

[Oss.] Ho usato i lemmi 1 e 2 con $A = [t_{k-1}, t_k]$, ma i lemmi valgono più in generale anche per integrali multipli.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 050

Titolo nota

19/11/2015

Lunghezza di una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\text{lunghe}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

Teorema Se γ è di classe C^1 , allora

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\substack{\uparrow \text{speed} = \|\text{velocity}\|}} dt$$

Casi particolari

$$\boxed{1} \quad n=2 \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \rightsquigarrow \text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

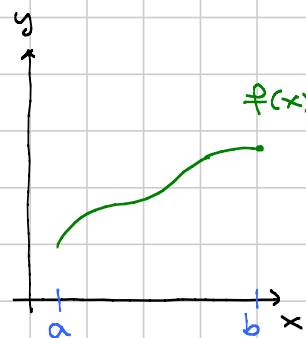
$$n=3 \quad \rightsquigarrow \text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

$\boxed{2}$ Curve cartesiane nel piano = tratti del grafico di una funzione

$$\gamma(t) := (t, f(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2(x)} dx$$

$\uparrow$
 $\dot{x}$ $\dot{y}$



$\boxed{3}$ Curve in coordinate polari : dati $\rho(t)$ e $\theta(t)$, quindi

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

Da queste :

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

Calcolo la speed² :

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$+ \dot{\rho}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

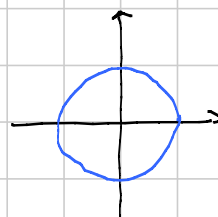
$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Quindi

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t) \dot{\theta}^2(t)} dt$$

Esempio 1 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_1 dt = 2\pi$$



la curva è percorsa a velocità unitaria

Esempio 2 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi] \rightsquigarrow \text{lunghe}(\gamma) = \pi$

$$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



Se calcolo la speed con γ_1 e γ_2 viene un calcolo più complicato.

— o — o —

Domanda: due curve che percorrono lo stesso sostegno, hanno la stessa lunghezza?

Risposta: sì, se il sostegno viene percorso lo stesso numero di volte in maniera continua.

Enunciato 1 Supponiamo $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 .
 Supponiamo $\varphi: [c, d] \xrightarrow{\text{sing.}} [a, b]$ una funzione C^1 strettamente monotona (dunque invertibile).
 Posso porre $\gamma_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita come

$$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$$

(Bruttalmente: γ_1 fa lo stesso tragitto di γ , solo a velocità diversa)

Allora $\text{lunghe}(\gamma) = \text{lunghe}(\gamma_1)$ (non ho detto che γ è iniettiva)

Dim. $\dot{\gamma}_1(t) = \underbrace{\dot{\gamma}(\varphi(t))}_{\text{vettore}} \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{numero}}$, quindi

$$\|\dot{\gamma}_1(t)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \varphi'(t)$$

$\uparrow$ assumo φ crescente

$$\begin{aligned} \text{Allora } \text{lunghe}(\gamma_1) &= \int_c^d \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt \\ &= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \quad z = \varphi(t) \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(z)\| dz = \text{lunghe}(\gamma) \end{aligned}$$

Se φ è decrescente devo mettere $-\varphi'(t)$ e invertire gli estremi.
 — o — o —

Enunciato 2 Supponiamo $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua
 Supponiamo $\varphi: [c,d] \rightarrow [a,b]$ debolmente
 monotona e continua e surgettiva.

$$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$$

e avremo

forse nemmeno
 no sense

$$\text{lunghe}(\gamma) = \text{lunghe}(\gamma_1)$$

Dim. Si tratta di dimostrare che ogni poligonale fatta sulla γ corrisponde ad una poligonale fatta sulla γ_1 e viceversa.

Poligonale su γ_1 : $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$

$$\gamma_1(s_0), \dots, \gamma_1(s_m)$$

$$\gamma(\varphi(s_0)), \dots, \gamma(\varphi(s_m))$$



poligonale su γ con tempi

$$a = \varphi(s_0) < \varphi(s_1) < \dots < \varphi(s_m) = b$$

(se φ è deb. crescente)

Viceversa, data poligonale su γ , corrispondente a

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

scelgo tempi

$$c = s_0 < s_1 < \dots < s_n = d$$

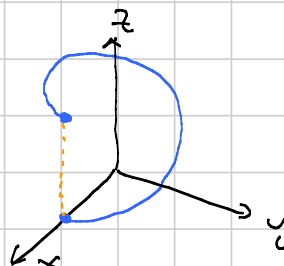
tali che $\varphi(s_i) = t_i$ (posso in maniera non unica grazie
 a monotonia + surgettività).

— o — o —

Esempio Elica cilindrica $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2}$$



Achtung! Per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ **NON** vale un equivalente di Lagrange.

$$\underbrace{\gamma(b) - \gamma(a)}_{\text{vettore}} = (b-a) \underbrace{\dot{\gamma}(c)}_{\text{vettore}}$$

Non è detto che esista $c \in [a, b]$ per cui vale

L'esempio è l'elica: $\gamma(b) - \gamma(a) = (1, 0, 2\pi) - (1, 0, 0) = (0, 0, 2\pi)$

D'altra parte: $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
 non possono essere
 nulle insieme

Achtung! Componente per componente vale Lagrange

$$\gamma_i(b) - \gamma_i(a) = (b-a) \dot{\gamma}_i(c_i)$$

$\uparrow$
 dipende da i , cioè dalla
 componente

Esempio 1 $(t, t^2) : t \in [a, b]$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \underbrace{4t^2}_{\dot{\gamma}^2}} dt = \text{si fa}$$



Esempio 2 Cicloide

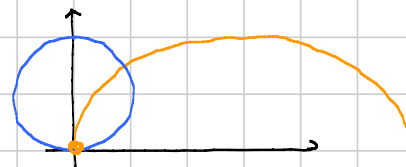
$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

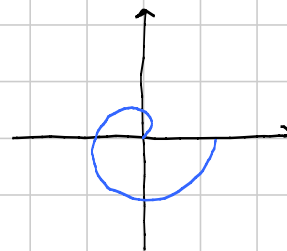
si fa con $t = 2z$ + formule
 per $\cos(2z)$



Esempio 3 $\rho(t) = t$, $\theta(t) = t$ $t \in [0, 2\pi]$

Spirale di Archimede $\rho = \theta$

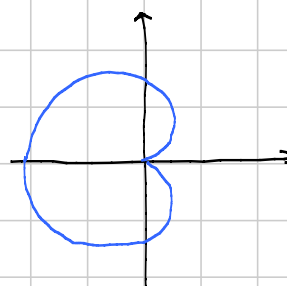
$$\begin{aligned} \text{lunghezza}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt = \text{solito} \end{aligned}$$



Esempio 4 Cardioida $\rho = 1 - \cos \theta$

$$\theta(t) = t \quad \rho(t) = 1 - \cos t$$

Si calcola la lunghezza



Esercizio Supponiamo $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUA.

È vero che posso definire la lunghezza usando solo
le poligoni con i tempi equispaziati?

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 051

Titolo nota

19/11/2015

CURVA DI LUNGHEZZA INFINITAEsempio fatto apposta

Scelgo i triangoli in maniera
che abbiano altezza

$$R_n = \frac{1}{n}$$

In questo modo $f(x)$ è continua e la curva

$$\gamma(t) = (1-t, f(1-t))$$

ha lunghezza infinita ... uso come poligonale i vertici dei
triangoli e tutti i lati obliqui hanno lunghezza $\geq \frac{1}{n}$.

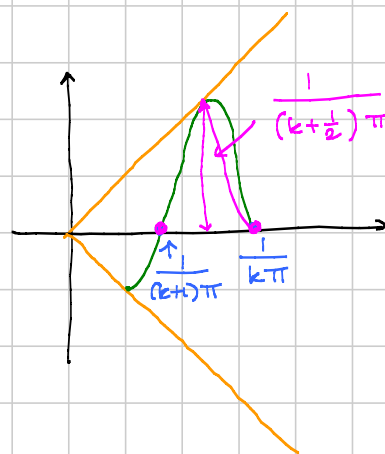
Esempio meno fatto apposta

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$\gamma(t) = (t, f(t))$ ha lung. infinita

Penso come poligonale quella che
passa per i p.t. in cui

$$\sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$



Ancora una volta, lati sono $\sim \frac{1}{k}$

Esercizio Per ogni $\alpha < 1$ esiste curva α -Hölder di lung. infinita

INTEGRALI CURVILINEI

- ① Notazione
- ② Significato geometrico
- ③ Idea della definizione
- ④ Tecnica di calcolo

1 NOTAZIONI

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

indica l'integrale
curvilineo

INTEGRALE DELLA FUNZIONE
 $f(x)$ LUNGO LA CURVA γ

Si intende che

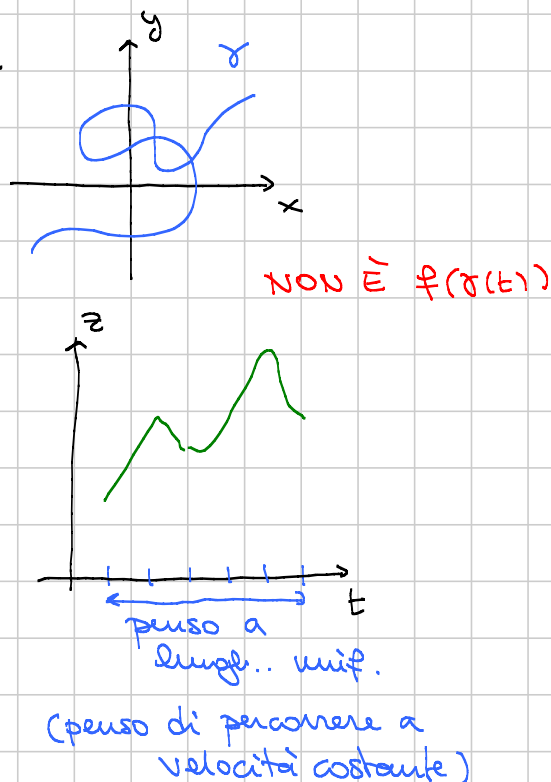
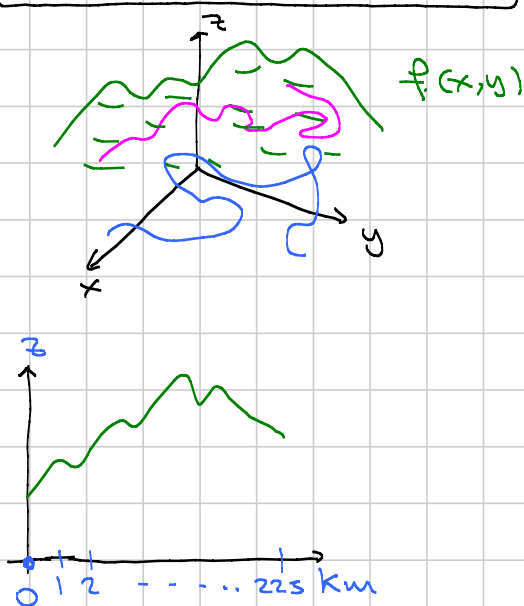
$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una curva

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione

↑ basta in realtà che $f(x)$
sia definita sul supporto di γ

2 SIGNIFICATO GEOMETRICO

$m=2$



Significato geometrico

$\int_{\gamma} f(x) ds =$ integrale del profilo altimetrico della tappa
supposta percorsa a velocità unitaria.

③ IDEA DELLA DEFINIZIONE Facciamo caso semplice:

γ e f continue.

Divido la curva in tanti tratti e poi calcolo somme inferiori e superiori

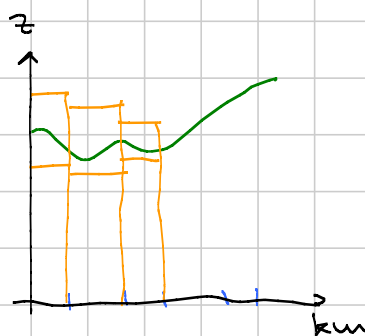
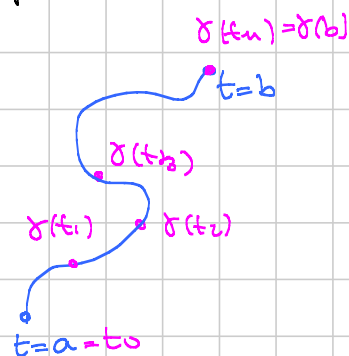
$$\sum_{k=1}^n M_k \text{ lunghezza } (\gamma(t_{k-1}) \rightarrow \gamma(t_k))$$

↑
max di f
nel tratto
 k -esimo

$$\sum_{k=1}^n m_k \text{ lunghezza } (\gamma(t_{k-1}) \rightarrow \gamma(t_k))$$

↑
min di f
nel tratto

Poi faccio variare le partizioni come sempre.



④ Formula per il calcolo Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è C^1 , allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Per $n=2$ diventa

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Def. Si definisce baricentro di una curva il pto G di coord. (nel caso piano)

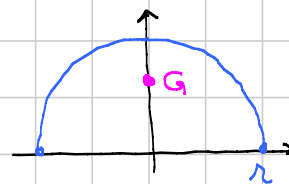
$$x_G := \frac{1}{\text{lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$$

$$y_G := \frac{1}{\text{lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio Baricentro della semicirconferenza.

È chiaro per simmetria che $x_G = 0$.

Calcolo y_G



$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \pi r \quad \int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{\pi} \underbrace{r \sin t}_{y(t)} \underbrace{\sqrt{r^2}}_{\text{speed}} dt = 2r^2$$

$$\text{Quindi } y_G = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

Oss. Anche l'integrale curvilineo NON DIPENDE DALLA
PARAMETRIZZAZIONE

[Dim.: esercizio di integrazione per sostituzione come con la
lunghezza]

Seconda dim. della formula per la lunghe. di curve C^1

$$\text{lunghe}(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad \leadsto \text{sempre usando il lemma facile di stima dall'alto.}$$

$$\text{lunghe}(\gamma) \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Idea: fissare $\varepsilon > 0$ e trovare una poligonale di

$$\text{lunghe} \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon \text{ qualcosa}$$

Tutte le componenti $\dot{\gamma}_i$ della velocity sono continue, quindi unif. cont., quindi prendo δ con cui ε e faccio vedere che ogni poligonale con $t_k - t_{k-1} \leq \delta$ va bene.

$$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}_i(t) dt = (t_k - t_{k-1}) \dot{\gamma}_i(\theta_{i,k})$$

↑
tra t_{k-1} e t_k

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = (t_k - t_{k-1}) \|\dot{\gamma}(s_k)\|$$

↑
intermedio

Aggiunto dopo video:
si può ottenere direttamente
con Lagrange senza
passare dall'integrale

Allora

$$\underbrace{\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})}_{v_i} = \underbrace{(t_k - t_{k-1}) \dot{\gamma}_i(s_k)}_{w_i} + \underbrace{(t_k - t_{k-1}) (\dot{\gamma}_i(\theta_{i,k}) - \dot{\gamma}_i(s_k))}_{u_i}$$

Sono componenti di 3 vettori u, v, w con $v = w + u$,
quindi

$$\|v\| \geq \|w\| - \|u\|$$

che vuol dire

$$\underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\|v\|} \geq \underbrace{(t_k - t_{k-1}) \|\dot{\gamma}(s_k)\|}_{\|w\|} - \|u\|$$

Tutte le comp. di u
sono + piccole di
 $(t_k - t_{k-1}) \cdot \varepsilon$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon \sqrt{n} (t_k - t_{k-1})$$

Sommando su k ho ottenuto

$$\text{lunghezza poligonale} \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \sqrt{n} (b-a) \varepsilon$$

↑
fisso, quindi ok.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 052

Titolo nota

24/11/2015

FORME DIFFERENZIALI

Forme Diff. LINEARI

1-FORME

Multilineari

k-forme

Def. (Stile corso di servizio) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.

Una forma diff. su Ω è un oggetto del tipo

$$\omega = \sum_{k=1}^n A_k(x) dx_k$$

dove $A_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Una forma ω si dice di classe C^m se tutte le $A_k(x)$ sono C^m .

Esempi

$n=2$

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$n=3$

$$\omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$$

$$\omega = \underbrace{(x^2 + e^{xy})}_{A(x,y)} dx + \underbrace{(y \sinh x)}_{B(x,y)} dy$$

Def. (Ufficiale) Una forma diff. su Ω è un'applicazione da Ω a valori nel duale di $\mathbb{R}^n$.

Oss. Possiamo pensare $dx_1, \dots, dx_n$ come la base canonica del duale di $\mathbb{R}^n$. In tal caso i coeff. $A_k(x)$ sono semplicemente le componenti della forma risp. a questa base.

Oss. Considerando la funzione $\varphi_k(x) = x_k$, si ottiene che il suo diff. in ogni punto (che possiamo indicare con dx_k) è esattamente il k -esimo el. della base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$.

Integrale di una forma diff. lungo una curva

- ① Notazione
- ② Significato fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecnica di calcolo

① Notazione

$$\int_{\gamma} \omega$$



Si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto, ω è una forma diff. definita su Ω , e $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ è una curva di classe C^1 a tratti.

Def. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice C^1 a tratti se esistono punti

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

tale che γ è C^1 in $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \dots, n$
e inoltre γ è C^0 in $[a, b]$



3-4 La definizione è la seguente

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt$$

→ andrebbe spezzato
nei vari intervalli
 $[t_{k-1}, t_k]$ per definire
bene $\dot{\gamma}_i(t)$.

Esempio per $n=2$ $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

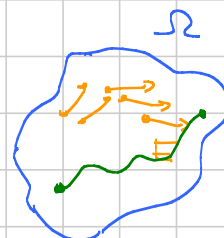
$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt$$

Oss. Nella definizione è come se brutalmente avessi fatto

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad \leadsto \quad dx = \dot{x}(t) dt \quad \leadsto \text{sostituzione fatta.}$$

[2] Significato fisico Per semplicità prendiamo $n=2$

Consideriamo l'applicazione $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da



$$E(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

Pensiamola come "campo di vettori". La curva $\gamma(t)$ è la traiettoria di un punto che si muove.

Allora $\int_{\gamma} \omega$ rappresenta il lavoro della forza sul punto,

$$\text{dove } \omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy.$$

$$\text{Lavoro} = \underbrace{\text{forza}}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{\text{velocità}}_{\dot{\gamma}}$$

— • — • —

INTEGRALE CURVILINEO VS INTEGRALE DI UNA FORMA

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) \dot{\gamma}_i(t) \right) dt$$

se $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\dot{\gamma}_i(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

L'ultima cosa scritta è l'integrale lungo la curva della funzione

prodotto scalare tra "campo" e vettore tangente

In 2 dimensioni diventa

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left[A(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

— o — o —

Differenza tra una forma diff. in $\mathbb{R}^2$ e una coppia di funzioni in $\mathbb{R}^2$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. In Ω posso definire diversi oggetti

$$\text{Func}(\Omega) = \{ \text{funzioni } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$$

$$\text{Curve}(\Omega) = \{ \text{curve } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \}$$

$$\text{Diff}(\Omega) = \{ \text{forme diff. in } \Omega \}.$$

Supponiamo di avere due aperti $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Supponiamo di avere $\varphi: A \rightarrow B$, diciamo di classe C^1 .

La φ induce delle applicazioni a livello di Func, Curve, Diff.

$$\text{Func}(B) \ni g \xrightarrow{f_{\#}} g \circ \varphi \in \text{Func}(A)$$

$$\text{Curve}(A) \ni \gamma \xrightarrow{f_{\#}} \varphi \circ \gamma \in \text{Curve}(B)$$

Le forme diff. vanno indietro, cioè data ω su B e una curva γ su A , definisco una forma $f_{\#}\omega$ su A mediante la formula

$$\int_{\gamma} \underbrace{f^* \omega}_{\substack{\text{forma de} \\ \text{reglio} \\ \text{trasformare} \\ \text{su A}}} = \int_{\underbrace{f_* \gamma}_{\substack{\text{curva trasportata} \\ \text{su B}}}} \omega$$

def
↓

Se io definissi $f^* \omega$ facendo il pull-back dei coefficienti A e B della forma ω , la relazione NON sarebbe soddisfatta. Quindi le forme tornano indietro, ma non come le funzioni.

Esercizio Capire come tornano indietro le forme, cioè data

$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$
definita su un certo aperto $B \subseteq \mathbb{R}^2$, trovare
la formula per ω_1 tale che

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\varphi \circ \gamma} \omega$$

per ogni curva $\gamma: [a,b] \rightarrow A$.

Analogo di algebra lineare

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{?} & W_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^*: W^* & \longrightarrow & V^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_1^* & \xrightarrow{?} & V_1 \end{array}$$

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 053

Titolo nota

24/11/2015

Cosa succede se riparametrizzo la curva

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ω forma diff. in Ω , $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ curva C^1
Sia ora

$$\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

Possiamo definire una nuova curva $\gamma_1: [c, d] \rightarrow \Omega$ come

$$\gamma_1(t) := \gamma(\varphi(t))$$

Qual è la relazione tra $\int_{\gamma} \omega$ e $\int_{\gamma_1} \omega$?

Basta usare la formula

$$\int_c^d \left[\sum_{i=1}^m A_i(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_{1i}(t) \right] dt \quad \text{ora}$$

$$\dot{\gamma}_{1i}(t) = \frac{d}{dt} (\gamma_i(\varphi(t))) = \dot{\gamma}_i(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

Quindi l'integrale diventa

$$\int_c^d \sum_{i=1}^m A_i(\gamma(\varphi(t))) \dot{\gamma}_i(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\begin{aligned} s &= \varphi(t) \\ ds &= \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int \sum_{i=1}^m A_i(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_i(s) ds$$

Gli estremi di integrazione sono a e b se $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$
sono b e a se $\varphi(c)=b$ e $\varphi(d)=a$

quindi può cambiare il segno.

Conclusione

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega \quad \text{se } \varphi \text{ conserva i versi } (\varphi(c)=a, \varphi(d)=b)$$

$$= - \int_{\gamma_1} \omega \quad \text{se } \varphi \text{ inverte i versi } (\varphi(c)=b, \varphi(d)=a)$$

Quindi

- per l'integrale curvilineo se inverte il verso, il segno resta lo stesso. Inoltre tratti ripetuti avanti/indietro si sommano,
- per l'integrale di una forma se inverte il verso, il segno cambia. Inoltre i tratti ripetuti avanti/indietro si cancellano.

— 0 — 0 —

FORME DIFF. ESATTE

CAMPI CONSERVATIVI

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia ω una forma differ. in Ω di classe C^0 .

Si dice che ω è esatta in Ω se esiste una funzione $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$A_k(x) = \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Quando succede, la funzione $V(x)$ si dice PRIMITIVA della forma o POTENZIALE.

Oss. 1 Bisogna sempre precisare DOVE una forma è esatta, cioè la stessa forma può essere esatta in un insieme, ma non in un altro. Ancora peggio: una forma può essere esatta in Ω_1 e in Ω_2 , ma non in $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Oss. La differenza tra due primitive di una stessa forma ω (posto che esistano) è una funzione con gradiente nullo ovunque, quindi è costante sulle componenti connesse di Ω .

Proposizione 1) Sia ω una forma diff. esatta in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
 Sia F una primitiva di ω
 Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti.

Allora

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Diff. tra i valori della primitiva agli estremi

Dim. Fare il conto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right] dt \\ &\stackrel{\omega \text{ esatta}}{=} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right] dt \\ &\stackrel{\text{chain rule}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = \left[F(\gamma(t)) \right]_{t=a}^{t=b} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

integrale di una derivata

Questo funziona se γ è di classe C^1 . Se è solo C^1 a tratti si fa lo stesso discorso tratto per tratto e tutti i termini intermedi si eliminano telescopicamente.

— o — o —

Oss. Per $n=2$ la dimostrazione diventa

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) dt = \text{come sopra} \\ &\quad \text{--- o --- o ---}\end{aligned}$$

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^p .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

- (i) ω è esatta
- (ii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi vale l'uguaglianza

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

- (iii) per ogni curva γ CHIUSA vale

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Corollario ciclistico

Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, allora di sicuro il vento non è gradiente di un potenziale

Dim $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \vec{E}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt < 0$, quindi non
↑ ↑
 vento se ho vento si annulla
contrario

(i) $\Rightarrow$ (ii) pure

$\gamma_2(t)$ = curva costante in $\delta(a) = \delta(b)$.

$$\int_{\sigma_1} \omega = \int_{\sigma_2} \omega = 0$$

↑ well, formula has $\dot{\sigma}_2(t) \equiv 0$.

$$0 = \int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma_1} \omega - \int_{\sigma_2} \omega$$

σ è chiusa

perché σ_2 è percorsa al contrario.

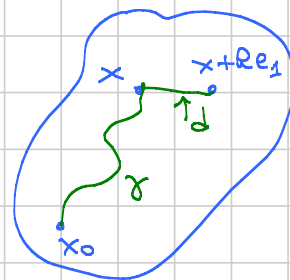
$$C(i) \Rightarrow C(i)$$
$$F(x) = \int \omega$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = A_k(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Lezione 053

$$F(x+Re_1) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} \omega$$

$\uparrow$
 d
 rettilissima

$$F(x) = \int_{\gamma} \omega$$



$$\frac{F(x+Re_1) - F(x)}{R} = \frac{1}{R} \int_0^R \omega$$

$$d(t) = (x+te_1) \quad t \in [0, R]$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^R \sum_{i=1}^n A_i(x+te_1) \dot{d}_i(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^R A_1(x+te_1) dt$$

$\uparrow$
 sono tutti nulli
 tranne $\dot{d}_1(t) \equiv 1$

$= A_1(x)$
 $\uparrow$
 Analisi 1

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 054

Titolo nota

25/11/2015

FORME DIFF. CHIUSE

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$$

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^1 .

Si dice che ω è chiusa se

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad \text{per ogni } i, k = 1, \dots, n$$

Casi speciali $n=2$ $\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$

$$\text{chiusa} \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

$n=3$ $\omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$

$$\text{chiusa} \Leftrightarrow A_y = B_x, \quad A_z = C_x, \quad B_z = C_y$$

Oss. Per una forma in n variabili le condizioni sono $\binom{n}{2}$

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^1 .

Allora vale l'implicazione

$$\omega \text{ esatta} \Rightarrow \omega \text{ chiusa}$$

Conseguenza al contrario Se ω non è chiusa, allora non è nemmeno esatta.

Dim. Essendo la forma esatta si ha che

$$A_k(x) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$$

per una opportuna primitiva $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ma allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \\ \frac{\partial A_i}{\partial x_k} &= \dots = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} \end{aligned}$$

— o — o —

coincidono per il
teo. di scambio
dell'ordine di deriv.

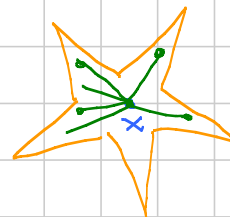
Def. Un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- CONVESSO se $\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1]$ si ha che

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$$

- STELLATO (star shaped) se

$$\exists x \in \Omega \quad \forall y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$$



- CONNESSO se non lo posso scrivere come unione disgiunta di due aperti non banali, cioè

$$A \text{ aperto}, B \text{ aperto} \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega \Rightarrow A = \emptyset$$

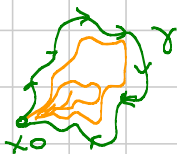
Oss. Per aperti di $\mathbb{R}^n$ la connessione è equivalente alla connessione per archi, cioè per ogni $x \in \Omega$ e ogni $y \in \Omega$ esiste $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ t.c. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

↑ continua

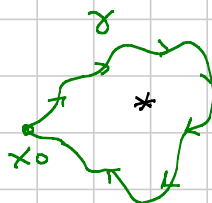
È equivalente anche alla connessione per archi di classe C^∞ .

• **SEMPLICEMENTE CONNESSO**

Ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante



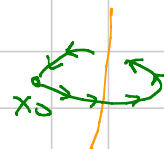
Posso ritrarre una curva su un pto in $\mathbb{R}^2$



In $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ non posso ritrarre una curva che "gira intorno al buco"

Brutalmente: Ω è semplicemente connesso se non ha buchi capaci di fermare la retrazione di una curva.

Esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{p.to}\}$ è semplicemente connesso
 $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$ NON è sempl. connesso

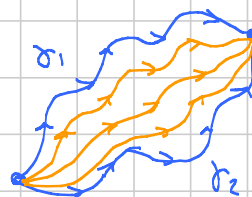


Def. più formale di omotopia.

Siano $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2: [a,b] \rightarrow \Omega$ due curve continue con gli stessi estremi $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$
 $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Si dice che le curve sono omotope mediante una omotopia che lascia gli estremi fissi se esiste

$$\Phi: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$$



tale che (i) Φ è continua

$$(ii) \Phi(t,0) = \gamma_1(t) \quad \text{per ogni } t \in [a,b]$$

$$(iii) \Phi(t,1) = \gamma_2(t) \quad \text{per ogni } t \in [a,b]$$

$$(iv) \Phi(a,s) = \gamma_1(a) \quad \text{per ogni } s \in [0,1]$$

$$(v) \Phi(b,s) = \gamma_1(b) \quad \text{per ogni } s \in [0,1]$$

FATTO GENERALE Ω è sempl. connesso se e solo se per ogni coppia di curve continue con gli stessi estremi esiste un'omotopia tra l'una e l'altra.

Teorema misterioso Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto QUALUNQUE e date due curve γ_1 e γ_2 di classe C^1 con gli stessi estremi e omotope tra di loro, allora esiste un'omotopia non solo C^0 , ma C^1 e oltre, cioè t.c.

$\phi_t, \phi_s, \phi_{ts}$ sono continue
— o — o —

Oss. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora

NI: solo se si definisce sui connessi

connesso $\Rightarrow$ stellato $\Rightarrow$ sempl. connesso $\Rightarrow$ connesso

Non vale nessuna delle implicazioni inverse (fare disegni in $\mathbb{R}^2$)

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto SEPL. CONNESSO.
Sia ω una forma diff. di classe C^1 in Ω .
Allora

ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

Achtung! Se ω è chiusa, ma Ω non è sempl. connesso, allora BOM, cioè può essere esatta oppure no.

Esempio banale $\omega =$ la forma nulla $0 dx + 0 dy$
 $\Omega =$ corona circolare in $\mathbb{R}^2$

Banalmente è esatta e chiusa

Esempio meno banale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \leftarrow \text{Non è sempl. connesso}$$

Dico che ω è CHIUSA

$$A_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = B_x$$

Dico che è ESATTA vedendolo ad occhio la primitiva:

$$F(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$$

(verifica diretta).

— o —

ANALISI 2

LEZIONE 055

Titolo nota

25/11/2015

Teorema fondamentale Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE.

Sia ω una forma diff. di classe C^1 in Ω CHIUSA.

Sia γ_1 e γ_2 due curve C^1 a tratti OMOTOPE, con gli stessi estremi.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Questo teorema implica l'esattezza delle forme chiuse sugli aperti sempl. connessi.

Dim. dell'implicazione Per avere l'esattezza basta mostrare che

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \quad \text{per ogni } \gamma \text{ chiusa a valori in } \Omega$$

Poiché Ω è sempl. connesso ogni curva γ chiusa è omotopa ad una curva γ_0 costante e per il teorema fondamentale

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 teo. fond. banalità: ogni forma ha integrale nullo sulle curve costanti.

— 0 — 0 —

ESEMPIO DI FORMA CHIUSA MA NON ESATTA

LA SOLITA

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \text{non sempl. connesso}$$

È CHIUSA?

$$A_y = \frac{-1}{x^2 y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{😊}$$

È ESATTA? NO: basta trovare una curva chiusa su cui l'integrale viene $\neq 0$.

Provo con $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} [A(\cos t, \sin t) (-\sin t) + B(\cos t, \sin t) \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Oss. La solita annuette primitiva in tutti questi insiemi, che sono stellati ($\Rightarrow$ sempl. connessi)

- $\{x > 0\}, \{y > 0\}, \{x < 0\}, \{y < 0\}$
- $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$



Una primitiva per $x > 0$ è $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

$$F_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad ; \quad F_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

È anche primitiva per $x < 0$.

Una primitiva per $y \neq 0$ è $F_2(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$

Fare il conto per esercizio.

Nota bene: nel primo quadrate $F(x, y)$ e $F_2(x, y)$ sono primitive della stessa forma, dunque DEVONO differire per una costante. Ed infatti

$$F(x, y) - F_2(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Precorso: } \arctan a + \arctan \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \forall a > 0$$

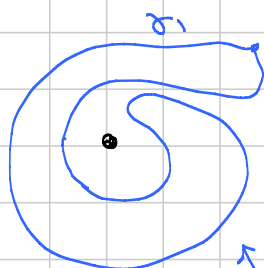
Se pongo

$$F_3(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{se } x > 0 \\ F_2(x, y) + \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

ho ottenuto una primitiva definita nel 1°, 2° e 4° quadrante. Procedendo allo stesso modo posso estenderla su $\mathbb{R}^2 \setminus$ semiasse neg. delle x .

Questa primitiva coincide a meno di costanti con quella definita per $y < 0$, ma le costanti sul 3° e 4° quadrante sono diverse.

Esempio ω = la solita. Quanto fa l'integrale sulle curve disegnate qui sotto

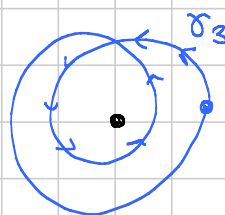


$$\int_{\gamma_1} \omega = 0$$

omotopa
costante

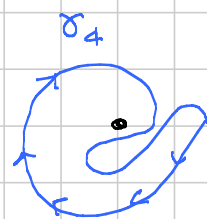


$$\int_{\gamma_2} \omega = 2\pi$$



$$\int_{\gamma_3} \omega = 4\pi$$

2 giri



$$\int_{\gamma_4} \omega = -2\pi$$

Fatto generale Ho una forma ω chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Come faccio a sapere se è esatta?

La testo su una curva che fa un giro intorno al buco, ad esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

- Se viene $\neq 0$, allora esattezza
- Se viene $= 0$, allora verrà 0 su ogni altra curva, perché ogni altra curva è omotopa a un multiplo di quella, quindi la forma è esatta.

Oss generale Dato una forma chiusa ω in un $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto qualunque, per avere l'esattezza basta testare su una famiglia di curve che generano il gruppo fondamentale.

Perché la solita è la solita?

Sia ω_s la solita

Sia ω un'altra forma chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Allora esiste una costante c tale che

$$\omega + c\omega_s \quad \text{è esatta}$$

quindi in particolare $\omega = -c\omega_s + \text{forma esatta}$

Dim. Basta trovare c in maniera tale che

$$\int_{\gamma} \omega + c\omega_s = 0$$

dove γ è la solita circ. che fa un giro intorno al buco

$$0 = \int_{\gamma} \omega + c\omega_s = \int_{\gamma} \omega + c \int_{\gamma} \omega_s \quad \leadsto \text{trovo } c.$$

lo calcolo 2π

□

Oss. Tutte le forme chiuse e non esatte su $\mathbb{R}^3 \setminus \{z \text{ p.t.}\}$ sono del tipo

$$\text{esatta} + a \omega_S + b \omega_{S'}$$

↑ ↑
solite traslate in maniera
da avere problemi nei z.p.t.

Oss. In $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$ tutte le forme chiuse ma non esatte sono del tipo

$$\text{esatta} + a \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + 0 dz \right)$$

(se la retta è l'asse z)

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 056

Titolo nota

27/11/2015

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETROCaso semplice : $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ $f: [a, b] \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $f(x, t)$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x, t) dx \quad (\text{integrale dipendente da un parametro})$$

Più in generale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, compatto, misurabile $f: \Omega \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $f(x, t)$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} f(x, t) dx \quad \uparrow \text{ in } n \text{ variabili}$$

Domande: $\varphi(t)$ è continua? È derivabile?

Teorema 1 Avendo assunto $f(x, t)$ continua, la funzione $\varphi(t)$ risulta continua in $[t_1, t_2]$.

Dim. Direttamente nel caso generale (in $\mathbb{R}^n$). Fisso $t_0 \in [t_1, t_2]$ e fisso $\varepsilon > 0$. La funzione $f(x, t)$ è continua, dunque unif. cont. su $\Omega \times [t_1, t_2]$, dunque esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|(x_1, s_1) - (x_2, s_2)| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1, s_1) - f(x_2, s_2)| \leq \varepsilon$$

Preso un qualunque $t \in [t_1, t_2]$ con $|t - t_0| \leq \delta$ avremo pertanto

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \int_{\Omega} [f(t, x) - f(t_0, x)] dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{distanza meno di } \delta \end{array} \\
 &\leq \int_{\Omega} \varepsilon dx = \varepsilon \text{meas}(\Omega)
 \end{aligned}$$

Questo mostra la continuità. $\square$

Oss. Non abbiamo usato l'unif. cont. nelle 2 variabili, ma solo l'uniforme continuità (doppio avverbio) nella variabile t , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |s_2 - s_1| \leq \delta \Rightarrow |f(s_2, x) - f(s_1, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$$

Non abbiamo nemmeno usato la continuità rispetto ad x .

Per esempio il teorema vale se



$$f(x, t) = \begin{cases} d_1(t) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ d_2(t) & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Se $d_1(t)$ e $d_2(t)$ sono continue, allora l'integrale dipendente da parametro è continuo.

Teorema 2 Supponiamo $f: \Omega \times [t_1, t_2]$ sia continua (in (x, t)) e derivabile parzialmente rispetto a t con $f_t(x, t)$ continua in $\Omega \times [t_1, t_2]$.

Allora φ è derivabile in $[t_1, t_2]$ e

$$\varphi'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

(Brutalmente:
porto dentro la
derivata)

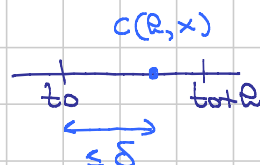
Dim. Faccio il rapporto incrementale e passo al limite sfruttando l'unif. cont. di $f_t(x, t)$.

Fisso $t_0 \in [t_1, t_2]$, fisso $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} - \int_{\Omega} f_t(x, t_0) dx \quad \text{e voglio dim. che tende a 0 per } h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\int_{\Omega} f(x, t_0 + h) dx - \int_{\Omega} f(x, t_0) dx \right] - \int_{\Omega} f_t(x, t_0) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\underbrace{\frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h}}_{\text{Lagrange in } t} - f_t(x, t_0) \right] dx \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} [f_t(x, t_0 + c(h, x)) - f_t(x, t_0)] dx$$



Questo in valore assoluto è $\leq \varepsilon$ se h è sufficientemente piccolo (basta che h sia + piccolo del δ dell'unif. cont. di f_t)

La conclusione è come prima.

— o — o —

Caso speciale In una variabile

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t) dx \quad \text{se } f_t \text{ esiste ed è continua.}$$

Più in generale in una variabile considero la funzione

$$F(a, b, t) := \int_a^b f(x, t) dx$$

Chi sono le derivate parziali di F rispetto ad a, b, t ?

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_a^b f_t(x, t) dx \quad (\text{fatto prima})$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a, b, t) = f(b, t) \quad (\text{Analisi 1})$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a, b, t) = -f(a, t) \quad (\text{Analisi 1})$$

↑
estremo "sotto"

Conseguenza:

$$\varphi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Funzione dentro variabile
Estremi variabili

Allora (posto che $a'(t)$, $b'(t)$ e $f_t(x, t)$ esistano continue

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t)$$

Dim. Basta osservare che $\varphi(t) = F(a(t), b(t), t)$
e applicare la CHAIN RULE:

$$\varphi'(t) = F_a a' + F_b b' + F_t$$

e sostituire F_a , F_b e F_t calcolati sopra.

— o — o —

TEOREMA 1 Una forma diff. chiusa in un aperto stellato è esatta, cioè ammette primitiva

Dim. Per semplicità la facciamo in 2 variabili.

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

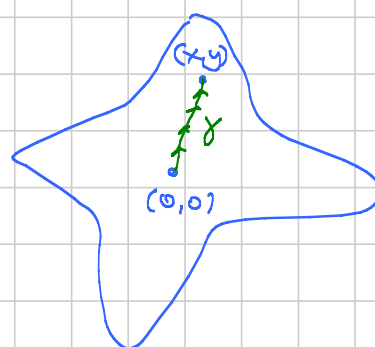
con A e B di classe C^1 in Ω stellato con $A_y = B_x$.

A meno di traslazioni posso supporre Ω stellato rispetto a $(0,0)$

Pongo

$$F(x,y) := \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è la "direzionissima" che unisce $(0,0)$ e (x,y) , cioè



$$\gamma(t) = (\underbrace{x_t}_{\uparrow x(t)}, \underbrace{y_t}_{\uparrow y(t)}) \quad t \in [0,1]$$

$$\text{Allora} \quad F(x,y) = \int_0^1 [\underbrace{A(x_t, y_t)}_{\uparrow A(x(t), y(t))} \underbrace{x_t}_{\uparrow \dot{x}(t)} + \underbrace{B(x_t, y_t)}_{\uparrow B(x(t), y(t))} \underbrace{y_t}_{\uparrow \dot{y}(t)}] dt$$

Devo verificare che $F_x = A$ e $F_y = B$.

$$F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \dots \quad (\text{derivata di un integrale dipendente da parametro, con } x \text{ parametro e } t \text{ variabile di integrazione})$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [A(x_t, y_t) x_t + B(x_t, y_t) y_t] dt$$

$$= \int_0^1 [A_x(x_t, y_t) t x + A(x_t, y_t) \cdot 1 + B_x(x_t, y_t) t y] dt$$

NIENTE PANICO: l'integranda è una derivata rispetto a t ...

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{chiusura}}}{=} \int_0^1 [A_x(x_t, y_t) t_x + A(x_t, y_t) + A_y(x_t, y_t) t_y] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t A(x_t, y_t)] dt \quad (\text{verificare mentalmente che torna!})$$

$$= [t A(x_t, y_t)]_{t=0}^{t=1} = A(x, y)$$

La verifica che $F_y = B$ è del tutto analoga. $\square$

ANALISI 2

—

LEZIONE 057

Titolo nota

27/11/2015

TEOREMA 2 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE.

Sia ω una forma diff. in Ω CHIUSA.

Siano γ_1 e γ_2 due curve a valori in Ω di classe C^1 a tratti, con gli STESSI ESTREMI e OMOTOPE.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Corollario Se Ω è sempl. connesso e ω è chiusa, allora ω è esatta.

Dim. In $\mathbb{R}^2$ sotto ipotesi legg. più forti (in apparenza), cioè γ_1 e γ_2 curve C^1 con omotopia C^1 e oltre.

Fissiamo le notazioni:

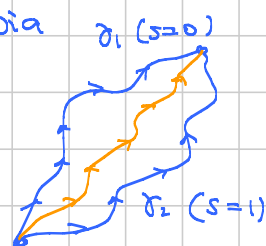
$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy \quad A_y = B_x$$

Omotopia la indico con $(x(t,s), y(t,s))$

↑
parametro che
descrive l'omotopia

$$\gamma_1(t) = (x(t,0), y(t,0)) \quad t \in [a,b]$$

$$\gamma_2(t) = (x(t,1), y(t,1)) \quad t \in [a,b]$$



Definisco

$$\varphi(s) := \int_{\gamma_s} \omega$$

$$\gamma_s(t) = (x(t,s), y(t,s))$$

$$= \int_a^b [A(x(t,s), y(t,s)) x_t(t,s) + B(x(t,s), y(t,s)) y_t(t,s)] dt$$

La tesi è equivalente a dimostrare che $\varphi(s)$ è costante, cioè $\varphi'(s) = 0$ per ogni $s \in [0, 1]$.

Questo è un integrale dipendente da parametro (s è il param., t la variabile di integrazione)

$$\varphi'(s) = \int_a^b \left[\boxed{A_x x_s x_t} + A_y y_s x_t + \boxed{A x_t s} + \boxed{B_x x_s y_t} + B_y y_s y_t + B y_t s \right] dt$$

Niente panico! Integrare per parti i termini con la deriv. 2ª,

$$\int_a^b A x_t s \, dt = \int_a^b A \underbrace{(x_s)_t}_{\substack{\uparrow \\ \text{si annulla} \\ \text{per } t=a \text{ e } t=b \\ \text{perché gli estremi sono fissi}}} \, dt = \left[A x_s \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} A \cdot x_s \, dt$$

$$\begin{aligned} &= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} A \cdot x_s \, dt = - \int_a^b (A_x x_t + A_y y_t) x_s \, dt \\ &= - \int_a^b \left[\boxed{A_x x_t x_s} + \underbrace{\boxed{A_y y_t x_s}}_{B_x y_t x_s} \right] dt \end{aligned}$$

Analogamente integrando per parti $B y_t s$ si eliminano gli altri due termini. $\square$

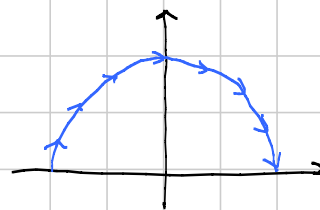
Esercizio Rifare le dim. dei teoremi 1 e 2 in n variabili (esercizio di gestione degli indici).

COME calcolo l'integrale di una forma lungo una curva?

- ① Formula usata correttamente
- ② Formula dopo aver riparametrizzato la curva
- ③ Esattezza + primitiva
- ④ Chiusura + scelta curva omotopa a quella data

Esempio 1 $\omega = x^2 y dx + y^2 dy$

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



ω non è chiusa, quindi non è esatta, quindi ③ e ④ ad alio.
La ① sembra calcolosa.

Provo la ② usando la parametrizzazione $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$. Achtung! Il verso è diverso, quindi metto segno - :

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega = - \int_0^{\pi} [\cos^2 t \sin t (-\sin t) + \sin^2 t \cdot \cos t] dt =$$

perché stessa curva, solo
in verso opposto

formula

si fa

[Provare a vedere che succede con la ①]

Esempio 2 $\omega = xy^2 dx + (x^2 y + y^3) dy$

$$\gamma(t) = (te^t, t^2 \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$A_y = 2xy \quad B_x = 2xy \Rightarrow$ è chiusa $\Rightarrow$ su tutto $\mathbb{R}^2$ è
esatta 😊

Cerco a occhio una primitiva

$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + C(y)$$

$$F_y(x, y) = x^2 y + \boxed{C'(y)} \\ = x^2 y + \boxed{y^3}$$

Quindi una primitiva è

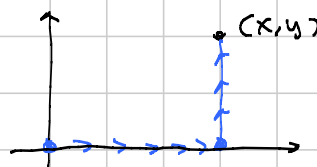
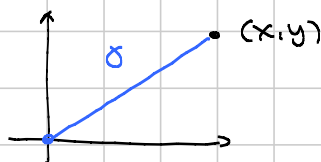
$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(\pi e^{\pi}, 0) - F(0, 0) =$$

banale sostituzione.

Oss. Se uno è disperato, saputo che ω è esatta può cercare la primitiva integrando lungo una curva che congiunge un p.to base (x_0, y_0) (magari l'origine) con il p.to generico (x, y) .

Curve furbe:



Esempio 3 $\omega = xy^2 dx + (x^2y + e^{y^2}) dy$

$$\gamma(t) = (te^t, t^2 \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

Come prima ω è esatta e una primitiva è

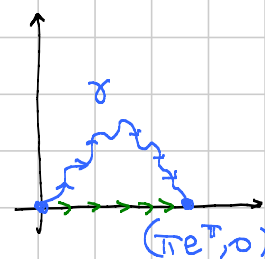
$$\frac{1}{2} x^2 y^2 + \text{primitiva di } e^{y^2} \dots$$

Posso lasciarla indicata e vedere cosa succede, oppure uso strategia ④ perché la forma è chiusa.

Sostituisco γ con la direttissima

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi e^\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{\pi e^\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula}}}{0} dt = 0 !!!$$



[Vedere che succedeva con la strategia ①!]

Esempio 4

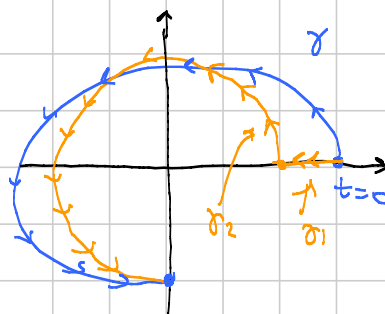
$$\omega = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x^2 \right) dx + \left(y^3 - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

$\gamma(t)$ è la curva descritta in coord. polari da

$$\rho(t) = 3 + \sin t \quad \theta(t) = t \quad t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$$

Volendo

$$\gamma(t) = \left(\underbrace{(3 + \sin t) \cos t}_{x(t)}, \underbrace{(3 + \sin t) \sin t}_{y(t)} \right)$$



Si vede che ω è chiusa, ma non esatta su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Cerco una curva omotopa a γ ma più semplice

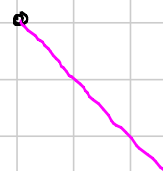
$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [2, 3]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$$

Entrambi si calcolano usando la formula

Oss. 1 Se uno non è così convinto che siano omotope, o non ha voglia di dimostrarlo, può usare l'esattezza in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{semiretta}$ che è sempl. connesso in quanto stellato e lì due curve qualunque danno lo stesso integrale.



Oss. 2 Chi vuole risparmiare può anche girare in senso opposto, ma tenerlo conto del $\pm 2\pi$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 058

Titolo nota

01/12/2015

SUPERFICI (Superfici 2-dim. in $\mathbb{R}^3$)

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (connesso, compatto, chiusura di un aperto, misur.)

Una superficie è una applicazione $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

Ipotesi classiche : $\rightarrow \Phi$ iniettiva in $\text{Int}(\Omega)$

$\rightarrow \Phi$ differenziabile in Ω

$\rightarrow J\Phi$ abbia rango 2 in ogni p.to di $\text{Int}(\Omega)$

Si definisce supporto della superficie l'immagine di Φ

SUPERFICI CARTESIANE "pezzi di grafico di funzioni"

Data $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la superficie cartesiana è $z = f(x, y)$.

Il suo supporto è

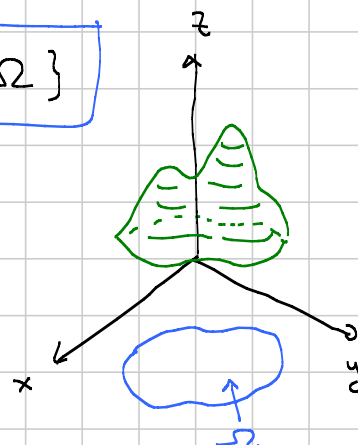
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$$

Una sua possibile parametrizzazione è

$$\Phi(u, v) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in \Omega\}$$

Notazione Indicheremo una superficie come

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



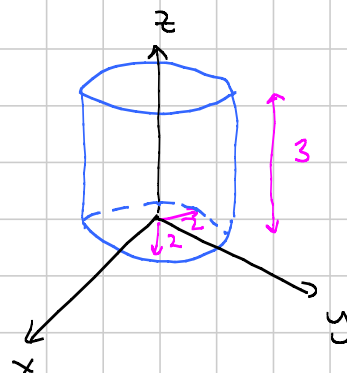
Esempio 1 $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

Pezzo di paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

Esempio 2 Cilindro con asse lungo
asse z

raggio di base = 2

altezza = 3



$$(2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \quad (\theta, z) \in \Omega$$

$$\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

Nota bene: la parametrizzazione è suriettiva su $\text{Int}(\Omega)$,
ma non ovunque.

$$J = \begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede che $\text{rang}(J) = 2$ ovunque.

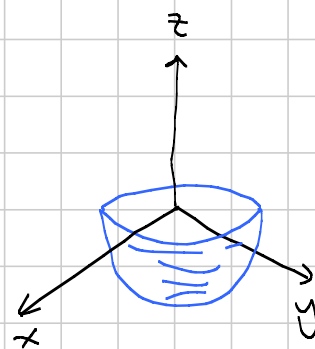
Esempio 3 Semisfera "sotto" con centro
in $(0, 0, 0)$ e raggio 2

Una parametrizzazione è (cartesiana)

$$\Phi(u, v) = (u, v, -\sqrt{4 - u^2 - v^2}) \quad \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}$$

Un'altra parametrizzazione (in coord. sferiche) è

$$\Phi(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi\cos\theta, 2\cos\varphi\sin\theta, 2\sin\varphi) \quad \text{con} \\ \Omega = [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$$



PIANO TANGENTE E VETTORE NORMALE

Vettore normale = vettore perpendicolare al piano tangente

Nel caso cartesiano il piano tangente ha equazione

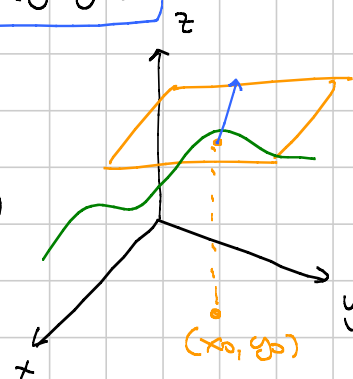
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Posso riscrivere il piano nella forma

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1(z - \underset{z_0}{f(x_0, y_0)})$$

Vettore normale è

$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) = \vec{n}$$



Nel caso generale l'equazione del piano tangente in forma parametrica è

$$(x, y, z) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) + t(x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) + s(x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$

In forma più breve

$$(x, y, z) = \phi(u_0, v_0) + t \phi_u(u_0, v_0) + s \phi_v(u_0, v_0)$$

cioè è il piano affine passante per il punto $\phi(u_0, v_0)$ e giacitura generata da $\phi_u(u_0, v_0)$ e $\phi_v(u_0, v_0)$, che sono linearmente indip. per ipotesi.

Brutalmente: l'equazione del piano tangente è il Taylor di ordine 1 della funzione vettoriale ϕ .

Per ottenere un vettore normale devo trovare un vettore perpendicolare a ϕ_u e ϕ_v . Questo si ottiene con la formula per il "prodotto vettore".

Formula misteriosa Dati due vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) si ottiene un vettore $\perp$ ad entrambi calcolando i 3 determinanti

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (b_1 c_2 - c_1 b_2, -a_1 c_2 + c_1 a_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Il vettore prodotto da questa formula, se i primi 2 sono Liu, cuilip., è tale che i 3 vettori nell'ordine costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la base canonica cioè la matrice di passaggio ha det. positivo

Esempio

$$\begin{array}{lll} (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 0, 1) \\ (0, 1, 0) & (0, 0, 1) & (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) & (1, 0, 0) & (0, 0, 1) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Det } 1 \\ \text{stessa orient.} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -1 \Rightarrow \text{orientazione opposta}$$

Chi è il vettore normale?

Devo applicare la formula con ϕ_u e ϕ_v

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

VETTORE NORMALE "CANONICO"

Indichiamo con M_1, M_2, M_3 le componenti di questo vettore. Allora

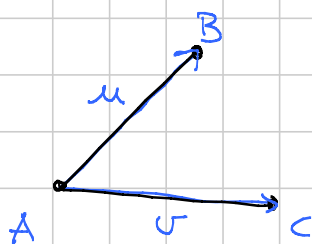
$$\|(M_1, M_2, M_3)\|^2 \neq 0 \text{ se il rango di } J\phi \text{ è due}$$

$$= \|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2 - \langle \phi_u, \phi_v \rangle^2$$

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} \|\phi_u\|^2 & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_u, \phi_v \rangle & \|\phi_v\|^2 \end{pmatrix}$$

Dim Fare il contacco.

Interpretazione geometrica: dati 3 punti nello spazio, come calcolo l'area del Δ di cui sono vertici?



Calcolo a partire da u e v il vettore normale $\vec{n}$ con la formula misteriosa. Allora

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|\vec{n}\|^2$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 059

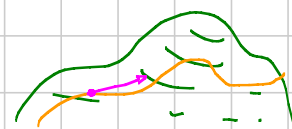
Titolo nota

01/12/2015

Prop. Se una curva è contenuta in una superficie, allora in ogni punto della curva la retta tangente alla curva è contenuta nel piano tangente alla superf. in quel punto

Dim. Indichiamo la superficie con

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in \Omega$$



Una curva a valori nella superficie la possiamo pensare ottenuta a partire da una curva $(u(t), v(t)) \quad t \in [a,b]$ a valori in Ω .

In questo modo la curva si ottiene per composiz.

$$\gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \quad t \in [a,b]$$

$$[a,b] \ni t \xrightarrow{(u,v)} \underset{\Omega}{(u(t), v(t))} \xrightarrow{\Phi} \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$$

Fisso un $t_0 \in [a,b]$. La retta tangente alla curva ha equazione parametrica

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ora $\dot{\gamma}(t_0)$ si calcola con la chain rule e viene

$$\dot{\gamma} = (x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, z_u \dot{u} + z_v \dot{v})$$

$$= \dot{u} (x_u, y_u, z_u) + \dot{v} (x_v, y_v, z_v) = \dot{u} \phi_u + \dot{v} \phi_v$$

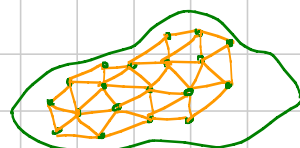
Quindi δ è comb. lineare di Φ_u e Φ_v , quindi sta nella giacitura del piano tangente alla sup. nel pto $\delta(t_0)$.

AREA DI UNA SUPERFICIE

Per le curve: si fanno le lunghezze dei segmenti, e a partire da quella approssimano la curva con le poligonali e definiscono la lunghezza di una curva per appross come sup. delle lunghezze delle poligonali.

Per le superfici: viene approssimato con dei triangoli di cui si fanno l'area e si fa il sup delle "triangolazioni".

Come non si definisce l'area?
Con il sup dei triangolini !!!



Motivo: il sup viene praticamente sempre $+\infty$.

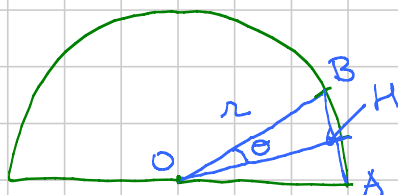
Esempio di Schwarz

Divido l'altezza in m parti

Divido la semicirca in $2m$ parti

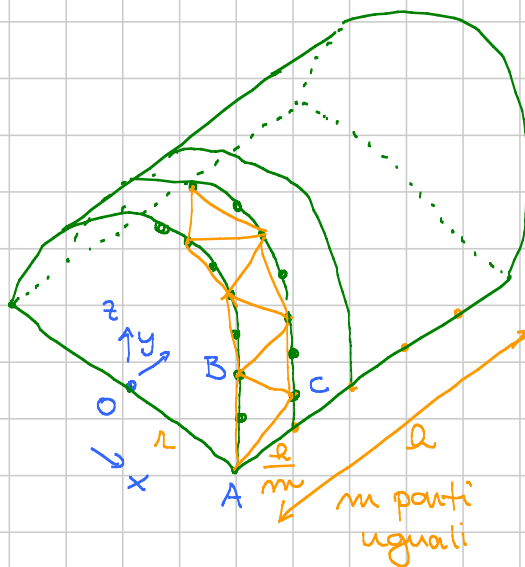
Calcoliamo l'area di ogni triangolo.

$$\text{Base} = AB = 2r \sin \theta = 2r \sin \frac{\pi}{2m}$$



Altezza del triangolo = lunghezza di CH

con H p.to medio della base



Scriviamo le coordinate di C e H

$$C = \left(r \cos \frac{\pi}{2n}, \frac{R}{m}, r \sin \frac{\pi}{2n} \right)$$

$$H = (OH \cos \theta, 0, OH \sin \theta) = (r \cos \theta \cos \theta, 0, r \cos \theta \sin \theta)$$

$$= \left(r \cos^2 \frac{\pi}{2n}, 0, r \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} \right)$$

Ma allora, posto $\theta = \frac{\pi}{2n}$,

$$CH^2 = (r \cos \theta - r \cos^2 \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2} + (r \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta)^2$$

$$= r^2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2} + r^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta)^2$$

$$CH^2 = r^2 (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2}$$

L'area di ogni triangolo è

$$\text{Area} = \frac{1}{2} 2r \sin \theta \sqrt{r^2 (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2}}$$

Quanti sono i triangoli? Considerando tutto il cilindro (sopra e sotto) sono $4n$ in ogni fascia, quindi in totale $4nm$.

Quindi alla fine l'area totale è

$$\text{Area tot} = 4nm r \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)^2 + \frac{R^2}{m^2}}$$

Facciamo il limite prendendo $m = n$

Sviluppando al 1° ordine diventa

$$\sim \frac{1}{4} n \cdot n \cdot \frac{\pi}{2n} \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \right)^2 + \frac{Q^2}{n^2}} \rightarrow 2 \pi R$$

"sup. che ci aspettiamo"

Oss. Otteniamo lo stesso limite prendendo $m = n^\alpha$ con $\alpha < 2$ o più in generale $m = o(n^2)$

Se prendo invece $m = n^3$

$$\sim \frac{1}{4} n \cdot n^3 \cdot \frac{\pi}{2n} \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \right)^2 + \frac{Q^2}{n^6}} \rightarrow +\infty$$

Morale: a seconda di come faccio i triangoli, il limite cambia! Posso anche farlo venire $2015 \pi R$ più di scegliere $m = \alpha n^2$ con α opportuno.

Quando $n \rightarrow +\infty$ molto più velocemente di m c'è un "effetto fisarmonica" per cui le aree dei singoli triangoli non tendono a zero.



Detto meglio matematicamente:

→ se in una curva prendo una sudd. molto fitta, i segmenti approssimano le rette tangenti

→ in una sp. i triangolini, anche se diventano piccoli, possono non approssimare il piano tangente.



ANALISI 2

-

LEZIONE 060

Titolo nota

02/12/2015

Ambientazione : superficie $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

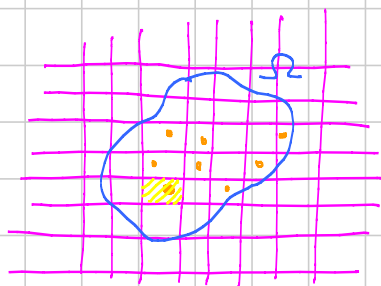
$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

componenti

AREA DI UNA SUPERFICIE

① Come non si definisce ? Con le triangolazioni $\rightarrow$ effetto fisarmonica dell'esempio di Schwarz

② Come si definisce ? Approssimando con pezzi di piano tangente.



$\rightarrow$ suddivido Ω in rettangolini $R_1, \dots, R_k$ (solo quelli che toccano Ω)

$\rightarrow$ scelgo un punto (u_i, v_i) in ogni rettangolo R_i

$\rightarrow$ su ogni rettangolo R_i approssimo la superficie, cioè la funzione Φ , con il suo sviluppo di Taylor di ordine 1, che è una mappa affine. nel punto (u_i, v_i)

$\rightarrow$ considero l'immagine di R_i mediante la mappa affine appena considerata. L'immagine di R_i è un parallelogrammo contenuto nel piano tg. alla sup nel p.to $\Phi(u_i, v_i)$

→ Brutalmente, sto "piastrellando" la superficie con dei parallelogrammi contenuti in piani tangenti.

→ Considero la somma delle aree dei parall. come una approx. dell'area della sup.

→ Infittisco la suddivisione e passo al limite.

Domanda: quanto vale l'area di ognuno dei parallelogrammi?

Domanda più generale: data un'affinità

$$\varphi(x) = Ax + b$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

A matrice 3×2

come si trasformano le aree dei rettangoli?

risposta: vengono moltiplicate per $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$
dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori 2×2 della matrice A.



piano



spazio

Nel nostro caso $A = J\phi(u, v)$, quindi

somma aree

parallelogrammi

$$= \sum_{i=1}^k \text{Area}(R_i) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$$

calcolato in (u_i, v_i)

Questa è una somma di Riemann per l'integrale

$$\int_{\Omega} \sqrt{M_1^2(u, v) + M_2^2(u, v) + M_3^2(u, v)} \, du \, dv$$

dove

$$M_1 = (Y_u Z_v - Y_v Z_u)$$

$$M_2 = (-X_u Z_v + X_v Z_u)$$

$$M_3 = (X_u Y_v - X_v Y_u)$$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\phi_u \quad \phi_v$

Conclusione!

$$\text{area superficie} = \int_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

Altri modi di scrivere l'integrandola

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \|\phi_u \wedge \phi_v\|^2 \quad \phi_u \wedge \phi_v = (M_1, M_2, M_3) \quad \text{😊}$$

$$= \|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2 - \langle \phi_u, \phi_v \rangle^2$$

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} \|\phi_u\|^2 & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_u, \phi_v \rangle & \|\phi_v\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Det} (J_\phi)^t J_\phi$$

$\text{---} \quad \circ \quad \text{---} \quad \circ \quad \text{---}$

Superfici equivalenti a meno di riparametrizzazione

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$$

$$\hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$$

↑
diffeomorfismo

Posso costruire una nuova superficie

$$\hat{\phi}: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\hat{\phi}(u, v) = \phi(\varphi(u, v))$$

$$\hat{\phi} = \phi \circ \varphi$$

Proposizione $\text{Area}(\hat{\phi}) = \text{Area}(\phi).$

Dim. Uso l'ultima caratterizzazione di $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$.

$$\text{Area}(\hat{\phi}) = \int_{\hat{\Omega}} \sqrt{\text{Det}(\mathcal{J}\hat{\phi})^t (\mathcal{J}\hat{\phi})} \, du \, dv = (\star)$$

osservo che $\mathcal{J}\hat{\phi} = \mathcal{J}\phi \cdot \mathcal{J}\varphi$, quindi

$$(\mathcal{J}\hat{\phi})^t \mathcal{J}\hat{\phi} = \mathcal{J}\varphi^t \mathcal{J}\phi^t \mathcal{J}\phi \mathcal{J}\varphi$$

$$\text{Det}(\mathcal{J}\hat{\phi})^t \mathcal{J}\hat{\phi} = \text{Det}(\mathcal{J}\phi)^t \mathcal{J}\phi (\text{Det} \mathcal{J}\varphi)^2$$

Quindi

$$(\star) = \int_{\hat{\Omega}} |\text{Det} \mathcal{J}\varphi| \sqrt{\text{Det}(\mathcal{J}\phi)^t (\mathcal{J}\phi)} \, du \, dv$$

$\uparrow$ calcolato in $\varphi(u,v)$

$$= \int_{\varphi(\hat{\Omega})=\Omega} \sqrt{\text{Det}(\mathcal{J}\phi)^t (\mathcal{J}\phi)} \, du \, dv$$

$\uparrow$ $\varphi(\hat{\Omega})=\Omega$ $\uparrow$ calcolato in (u,v)

cambio di variabili negli
integrali doppi

$$= \text{Area}(\phi).$$

Caso speciale 1 Superficie cartesiana $(u, v, f(u, v))$

$$\mathcal{J}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

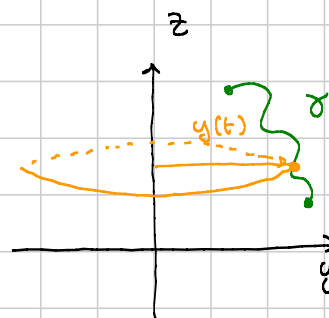
$$\begin{aligned} (M_1, M_2, M_3) &= \phi_u \wedge \phi_v \\ &= (-f_u, -f_v, 1) \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Area sup. cartesiana} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$

Caso speciale 2 Superficie di rotazione

Considero una curva a valori nel piano yz



$$\gamma(t) = (y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$$

Ruotando intorno all'asse z la curva genera una sup. parametrizzata da

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) \quad \begin{array}{l} t \in [a, b] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & -y(t) \sin \theta \\ \dot{y}(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta \\ \dot{z}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-y \dot{z} \cos \theta, y \dot{z} \sin \theta, y \dot{y})$$

$$\text{Area superficie} = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{y^2 \dot{z}^2 + y^2 \dot{y}^2}$$

$$= 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 061

Titolo nota

02/12/2015

SUP. DI ROTAZIONE

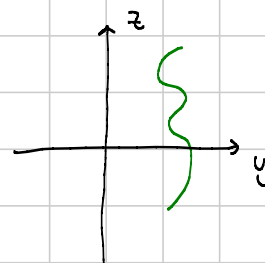
$$\gamma(t) = (y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$y(t) \geq 0$$

Superficie

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$



$$(t, \theta) \in \Omega = [a, b] \times [0, 2\pi]$$

$$\text{Area sup.} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

Oss. Usando gli integrali curvilinei possiamo riscrivere la formula

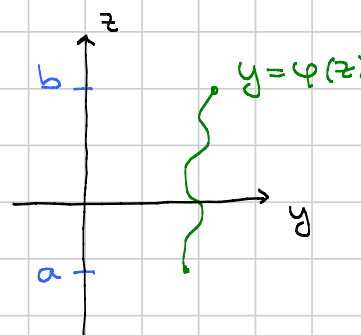
$$\text{Area sup} = 2\pi \int_{\gamma} y ds$$

Caso speciale : curva ortogonale rispetto all'asse z , cioè

$$\gamma(t) = (\varphi(t), t) \quad t \in [a, b]$$

Allora

$$\text{Area sup} = 2\pi \int_a^b \varphi(t) \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)} dt$$



— 0 — 0 —

TEOREMA (GULDINO 2)

lunghezza circ. descritta da G durante la rotazione

$$\text{Area sup rotazione} = \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G$$

dove $\rightarrow \gamma$ è la curva che ruota

$\rightarrow y_G$ è la coord. y del baricentro della curva

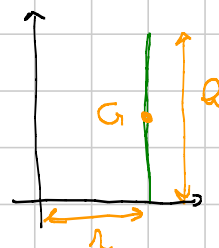
Dim Basta usare le definizioni

$$y_G = \frac{1}{\text{lunghe}(\gamma)} \cdot \int_{\gamma} y \, ds \quad (\text{per definizione})$$

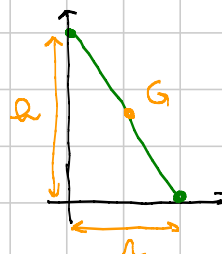
Se moltiplico per $2\pi \text{lunghe}(\gamma)$ ottengo proprio la sup in uno dei tanti modi di scriverla. $\square$

Esempio 1 Cilindro

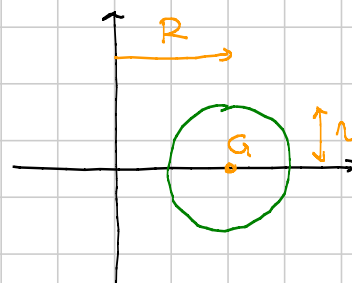
$$\begin{aligned} \text{Area sup laterale} &= \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G \\ &= R \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \text{Area sup. laterale} &= \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G \\ &= \sqrt{R^2 + R^2} \cdot 2\pi \frac{R}{2} \end{aligned}$$

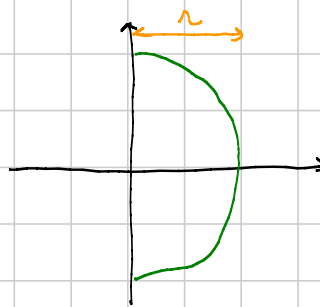
Esempio 3 Toro

$$\begin{aligned} \text{Area sup. totale} &= \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G \\ &= 2\pi R \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R^2 \end{aligned}$$



Esempio 4 Sfera

1° modo : uso il baricentro della semicirc. calcolato qualche lezione fa.

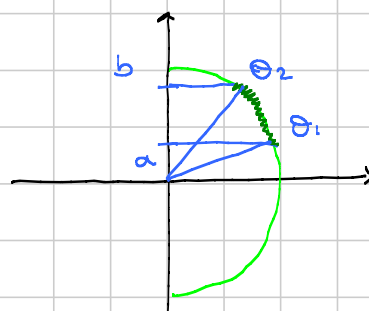


2° modo : uso direttamente la formula

$$\begin{aligned}
 \text{Area sup} &= 2\pi \int_{\gamma} y \, ds & \begin{matrix} y(t) & z(t) \\ \gamma(t) & = (r \cos t, r \sin t) \\ t & \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{matrix} \\
 &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \, dt \\
 &= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

Esempio 5 Segmento sferico

Posso usare la stessa formula con diversi estremi di integrazione



$$\begin{aligned}
 \text{Area sup} &= 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos t \, dt \\
 &= 2\pi r^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) & b = r \sin \theta_2, \quad a = r \sin \theta_1 \\
 &= 2\pi r (b - a)
 \end{aligned}$$

— o — o —

INTEGRALI SUPERFICIALI

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

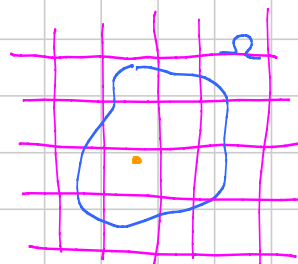
integrale superficiale

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

funzione di 3 variabili definita almeno sul sostegno della sup.

Idea della definizione

- Partizione Ω come nella def. di area $\sim$ rettangoli R_i
- fisso punti (u_i, v_i) in ogni R_i
- considero il parallelogrammo P_i trasformato di R_i
- considero la somma di Riemann



$$\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) f(\phi(u_i, v_i))$$

- raffinisco la suddivisione mandando a 0 il lato dei rettangoli.

Al limite ottengo

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \int_{\Omega} f(\phi(u, v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

Integrale di flusso Dato un campo di vettori

$$E(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \text{flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \sigma$$

$\uparrow$
VERSORE normale alla superficie

Ora $\vec{n} = (M_1, M_2, M_3)$ diviso la sua norma che va a semplificare la radice.

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

Esempio Integrale superficiale su una sfera

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$$

... conto di $J\Phi$... $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = r^2 \cos \varphi$

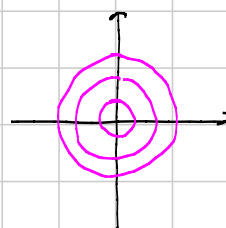
Quindi

$$\int_{\text{sfera}} f(x, y, z) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi f(x, y, z) \underbrace{r^2 \cos \varphi}_{\substack{\text{fisso} \\ \uparrow \\ \text{sostituisco} \\ \text{coord. sferiche}}}$$

Finestra sul futuro: formule di coarea

Coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta f(p \cos \theta, p \sin \theta) \cdot p \\ &= \int_0^{+\infty} dp \int_{\gamma_p} f(x, y) ds \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{circ. di raggio } p \end{aligned}$$

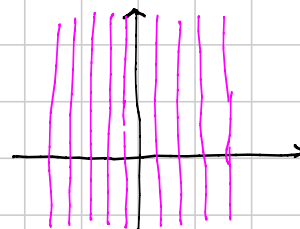


Coord. sferiche

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \dots = \int_0^{+\infty} dp \int_{S_p} f(x, y, z) d\sigma$$

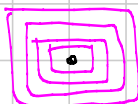
Fubini-Tonelli

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}_x} dy f(x, y)$$



Esercizio Provare a scrivere e vedere se funzionano
dei Fubini-Tonelli

- quadrati
- rettangolari
- parabolici



ANALISI 2 — LEZIONE 062

Titolo nota

04/12/2015

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

Setting: data una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
dato un campo di vettori

$$\vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

Operatori differenziali: mandano funzioni / vettori in funzioni / vettori facendo un po' di derivate

GRADIENTEFUNZIONE $\rightsquigarrow$ VETTORE

$$f(x, y) \rightsquigarrow \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \nabla f(x_1, \dots, x_n) \text{ è il vettore che ha come componenti } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

LAPLACIANOFUNZIONE $\rightsquigarrow$ FUNZIONE

$$f(x, y) \rightsquigarrow \Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

$\uparrow$ Delta

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \Delta f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x_1, \dots, x_n)$$

Oss. Il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana H_f

DIVERGENZA

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$$

$$\vec{E} = (A_1, \dots, A_n)$$

funzione di
n variabili

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_n)$$

ROTORE

CURL in inglese

VEETTORE $\rightsquigarrow$ VETTORE

VALE SOLO IN $\mathbb{R}^3$

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$\operatorname{rot} \vec{E}$ è lo sviluppo formale del det

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

Oss. In fisica spesso si usa il rotore anche in dimensione due, intendendo che c'è una terza componente nulla

$$\operatorname{rot} (A, B) = \operatorname{rot} (A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

dipendono
solo da x e y

Oss. (Finestra sul futuro) Il rotore è una semplificazione in $\mathbb{R}^3$ di una cosa più generale, che è il differenziale di 1-forme differenziali.

— o — o —

Osservazioni

$$\textcircled{1} \quad \text{div}(\nabla f) = \Delta f$$

Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$:

$$\text{div}(\nabla f) = \text{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\textcircled{2} \quad \text{rot}(\nabla f) = 0 \quad (\text{inversione ordine di derivazione})$$

Sempre in $\mathbb{R}^3$: $\text{rot}(\nabla f) = \text{rot}(f_x, f_y, f_z) =$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, -f_{zx} + f_{xz}, f_{xy} - f_{yx})$$

Ultra brutal: operatorialmente la seconda e terza riga sono lin. dipendenti

Osservazione Funziona anche in due variabili con il rotore dei vettori.

$$\textcircled{3} \quad \text{div}(\text{rot} \vec{E}) = 0$$

$$\text{In } \mathbb{R}^3 : \text{div}(\text{rot} \vec{E}) = \text{div}(C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$= (C_y - B_z)_x + (-C_x + A_z)_y + (B_x - A_y)_z$$

$$= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{A_{zy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0.$$

Oss. Molte cose non hanno senso: $\text{div} f$, $\text{rot} f$, $\Delta(\text{rot})$
 $\nabla(\text{rot})$, $\text{rot}(\text{div})$

GRADIENTE Data f funzione

→ Se $\nabla f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{0}$, allora f è localmente costante, quindi costante se Ω è connesso.

→ Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$, allora $f_1 - f_2$ è costante se Ω è connesso

ROTORE Dato $\vec{E} = (A, B, C)$

→ Se $\text{rot } \vec{E} = 0$, allora la forma diff. $A dx + B dy + C dz$ è chiusa, quindi se Ω è semplicemente connesso segue che $\vec{E}$ è il gradiente di una qualche funzione f .

(Stessa cosa in $\mathbb{R}^2$ con il rotore dei fisici e forma $A dx + B dy$)

→ Se $\text{rot } \vec{E}_1 = \text{rot } \vec{E}_2$ e Ω è sempl. connesso, allora esiste una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \nabla f$$

Oss. Se siamo in $\mathbb{R}^2$, p.to (con il rot. dei fisici) o in $\mathbb{R}^3$, retta, allora

$\text{rot } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = \nabla f + \text{multiplo dei coeff. della solita forma chiusa e non esatta.}$

— o — o —

DIVERGENZA Dato $\vec{E} = (A, B, C)$ in $\mathbb{R}^3$

→ Se $\text{div } \vec{E} = 0$, allora sotto opportune ipotesi su Ω esiste un campo $\vec{F}$ tale che

$$\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$$

Ad esempio questo vale se Ω è **stellato**

→ Se $\text{div } \vec{E}_1 = \text{div } \vec{E}_2$, e Ω è stellato, allora

$$\exists \vec{F} \text{ tale che } \vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \text{rot } \vec{F}$$

Oss. $\vec{F}$ non è per nulla unico, in quanto basta aggiungere ad $\vec{F}$ il gradiente di una funzione ed il suo rotore non cambia.

— o — o —

Esercizio Calcolare, dato $\vec{E} = (A, B, C)$

$$-\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) + \nabla(\text{div } \vec{E}) = (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

$$\nabla(\text{div } \vec{E}) = \nabla(A_x + B_y + C_z) =$$

$$= (A_{xx} + B_{yx} + C_{zx}, A_{xy} + B_{yy} + C_{zy}, A_{xz} + B_{yz} + C_{zz})$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ C_y - B_z & A_z - C_x & B_x - A_y \end{pmatrix}$$

$$= (B_{xy} - A_{yy} - A_{zz} + C_{zx}, \dots, \dots)$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 063

Titolo nota

04/12/2015

TEOREMA DI GAUSS - GREEN

Caso nel piano $m=2$

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

↑
vettore normale
esterno ad Ω

Si richiede che

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato con $\partial\Omega$ abbastanza regolare
- $f: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione suff. regolare con $\hat{\Omega} \supseteq \bar{\Omega}$
- $E: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo di vettori suff. regolare

Ora

- al LHS c'è l'integrale doppio di una funzione
- il primo termine al RHS è un integrale curvilineo di una funzione
- il secondo termine al RHS è l'integrale doppio di una funzione.

— o — o —

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sempre in $\mathbb{R}^2$

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Dim. (Del teo. div. detto Gauss-Green) Prendo $f(x,y) := 1$.

Esercizio Data una funzione f ed un campo E , calcolare $\text{div}(f\vec{E})$

$$\text{div}(f\vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \text{div} \vec{E}$$

Direttamente in $\mathbb{R}^n$: $\vec{E} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$
 $f\vec{E} = (fA_1, fA_2, \dots, fA_n)$

$$\text{div}(f\vec{E}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (fA_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot A_k + f \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot A_k}_{\langle \nabla f, \vec{E} \rangle} + \underbrace{f \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_k}}_{f \text{div} \vec{E}}$$

Dim.] (di Gauss-Green a partire dal teorema della div).

$$\int_{\Omega} \text{div} \vec{E} \, dx \, dy = + \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \quad (\text{teo. div.})$$

Lo applico con $f\vec{E}$ al posto di $\vec{E}$. Al LHS

$$\int_{\Omega} \text{div}(f\vec{E}) \, dx \, dy = \underbrace{\int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy}_{\text{esercizio}} + \int_{\Omega} f \text{div} \vec{E} \, dx \, dy$$

Al RHS ottengo

$$\int_{\partial\Omega} \langle f\vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Riorganizzando i termini ottengo G-G. $\square$

Corollario di G.G. Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \, dy$$

dove $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Dim. Basta usare G.G. con $f = v$ e $\vec{E} = \nabla u$

$$\begin{array}{ccccc} \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy & = & \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds & - & \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{v \operatorname{div}(\nabla u)}_{\text{"}\Delta u\text{"}} & & \underbrace{v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds}_{\text{---o---}} & & \underbrace{\langle \nabla v, \nabla u \rangle}_{\text{---o---}} \end{array}$$

Oss. $\langle \nabla u, \vec{n} \rangle$ è la derivata di u nella direzione uscente da Ω .

---o---o---

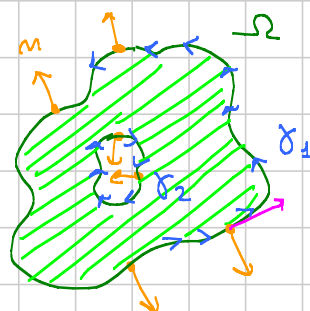
In dimensione 2, l'integrale sul bordo può essere interpretato usando le forme diff.

Prendiamo il te. della div. con $\vec{E} = (A, B)$:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{div} \vec{E} & & \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \\ \int_{\Omega} (Ax + By) \, dx \, dy & = & \int_{\partial\Omega} (A \cdot m_1 + B m_2) \, ds \quad \vec{n} = (m_1, m_2) \end{array}$$

Prendiamo nel disegno due curve γ_1 e γ_2 che percorrono il bordo.

Se le curve percorrono il bordo $\partial\Omega$ lasciandosi Ω a sinistra, allora $\vec{n}$ si ottiene ruotando di 90° in senso ORARIO il vettore tangente alla curva.



Quindi se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ come sopra $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$
 $t \in [a, b]$

$$\text{versore tangente} = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right)$$

e infine

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

↑
algebra
lineare

Ma allora

$$\int_{\partial\Omega} (A n_1 + B n_2) ds = \int_a^b \left(A \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

rot. curvilinear
↓

$$= \int_a^b (A \dot{y} - B \dot{x}) dt$$

$$= \int_{\gamma} (-B dx + A dy)$$

↑
Forma differenziale
curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando
 Ω a sinistra

Conclusione

$$\int_{\Omega} (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (-B dx + A dy)$$

↑
curva che percorre $\partial\Omega$
lasciandolo a sx.
↑
forma

Oss.1 "Lasciare Ω a sinistra" è un modo brutale di dire che $\{\vec{n}, \vec{\tau}\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come quella canonica.

Oss.2 GG è la formula di integrazione per parti degli integrali multipli.

ANALISI 2 - LEZIONE 064

Note Title

09/12/2015

Teorema della divergenza e applicazioni

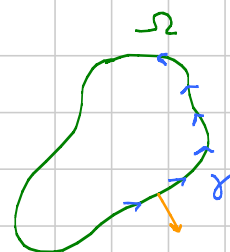
Sotto opportune ipotesi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Ci sono 2 modi di pensare il RHS:

- ① come integrale di flusso
- ② come integrale di una forma differenziale

$$\vec{E} = (A(x, y), B(x, y))$$

 $t \in [a, b]$

$\partial\Omega$ sia il supporto di una o più curve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ che lo percorrono "lasciando Ω a sinistra". In queste ipotesi

$$\text{vettore tangente} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \underbrace{(+\dot{y}, -\dot{x})}_{\substack{\uparrow \\ \text{rotato orario} \\ \text{del tangente}}}$$

Quindi

$$\int_{\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_a^b A \dot{y} - B \dot{x} \, dt = \int_{\gamma} -B \, dx + A \, dy$$

In conclusione possiamo riscrivere il teorema come

$$\int_{\Omega} (A_x + B_y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} -B \, dx + A \, dy$$

$\uparrow$ una o più curve che percorrono $\partial\Omega$ come previsto

Applicazioni classiche

- ① Calcolo di integrali di flusso
- ② Calcolo di integrali su domini descritti mediante il bordo.

Caso tipico: calcolo dell'area



Data una curva chiusa $\gamma(t)$ nel piano, calcolare l'area del dominio che racchiude.

Supponiamo la curva semplice e che lasci il dominio a sx.

Applico la formula precedente con $\vec{E} = (x, 0)$

$\uparrow$ A $\uparrow$ B

Allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_{\gamma} y \, dx$$

In alternativa posso prendere $\vec{E} = (0, y)$ da cui

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} -x \, dy$$

Oss. È evidente che le due formule danno lo stesso risultato cioè

$$\int_{\gamma} y \, dx = - \int_{\gamma} x \, dy$$

perché

$$\int_{\gamma} y \, dx + x \, dy = 0$$

perché la forma $y \, dx + x \, dy$ è chiusa (quindi esatta su $\mathbb{R}^2$) e la curva è chiusa.

Oss. Posso ottenere altre formule "mixando" le 2 precedenti

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} \frac{1}{2} y dx - \frac{1}{2} x dy \\ &= \int_{\gamma} \lambda y dx - (1-\lambda) x dy \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

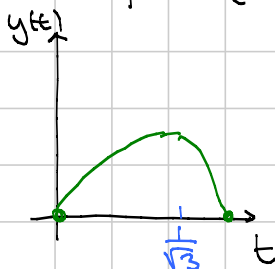
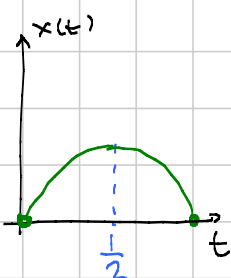
Aggiunto 2 anni dopo video: in questa pagina ed in quella precedente ci sono vari segni al contrario.

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} y dx = - \int_{\gamma} x dy = \text{mix vari}$$

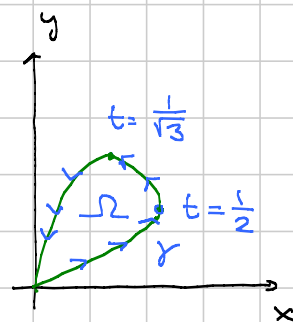
Se $\gamma(t)$ percorre nel verso sbagliato, bisogna cambiare i segni.

Esempio 1 $\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)}) \quad t \in [0, 1]$

Questa è una curva semplice (verifica!)



$$y'(t) = 1 - 3t^2$$



$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} y dx = \int_0^1 y(t) \dot{x}(t) dt = \int_0^1 (t-t^3)(1-2t) dt$$

In alternativa

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma} x dy = - \int_0^1 x(t) \dot{y}(t) dt = - \int_0^1 (t-t^2)(1-3t^2) dt$$

Il secondo integrale si ottiene dal 1° mediante integrazione per parti.

Esempio 2 Calcolare $\int_{\Omega} (x^2 + y) dx dy$, dove Ω è quello precedente

$$\int_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\gamma} -B dx + A dy$$

Scelgo $\vec{E} = (A, B) = \left(\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{2}y^2\right)$

$$\int_{\Omega} (x^2 + y) dx dy = \int_{\gamma} -\frac{1}{2}y^2 dx + \frac{1}{3}x^3 dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ y^2}}{(t-t^3)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{(1-2t)} + \frac{1}{3} \underset{\substack{\uparrow \\ x^3}}{(t-t^2)^3} \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{(1-3t^2)} \right] dt$$

= si fa.

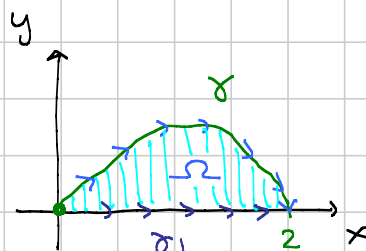
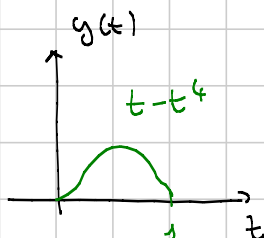
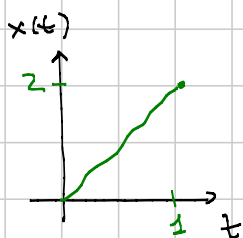
In alternativa potrei usare

$$\vec{E} = \left(0, x^2y + \frac{1}{2}y^2\right) \text{ oppure } \vec{E} = \left(\frac{1}{3}x^3 + xy, 0\right)$$

o un'altra opportuna.

— o — o —

Esempio 3 Sia Ω limitato dalla curva $\gamma(t) = (t+t^3, t-t^4)$ e dall'asse x . $t \in [0, 1]$



Calcolare $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$

ANALISI 2

-

LEZIONE 065

Titolo nota

09/12/2015

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (-Bdx + A dy)$$



Prendiamo una forma diff. $\omega = Cdx + Ddy$

Prendiamo due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi e nessuna altra intersezione.

Supponiamo che ω sia definita e suff. regolare in tutto l'insieme Ω delimitato dalle due curve. Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} (Cdx + Ddy) \quad D=A, B=-C$$

$$= \iint_{\Omega} (D_x - C_y) dx dy$$

se ω è chiusa

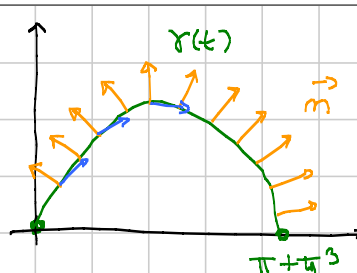
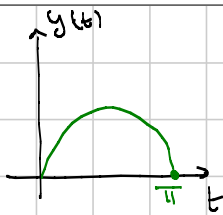
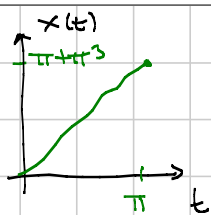
Quindi

$$\omega \text{ chiusa} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \text{per sapere che } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ percorrono il bordo } \partial\Omega \text{ di un } \Omega \text{ su cui } \omega \text{ è ben definita.}$$

Esempio 1 $\vec{E} = (y^2 \arctan y, x \sin(x^3))$

$$\gamma(t) = (t + t^3, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ lungo γ pensando al flusso dal basso verso l'alto.



$\gamma(t)$ è una curva semplice non chiusa.

1° modo Scrivo il vettore $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (-\dot{y}, \dot{x})$
 ↗
 rotazione antioraria del
 tangente

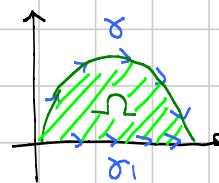
Quindi calcolo l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \int_{\gamma} -A dy + B dx \\ &= \int_0^{\pi+\pi^3} (\sin t)^2 \sin t \cdot (\sin t) \cdot (-\cos t) + \dots \\ &= \text{contaccio.} \end{aligned}$$

2° modo Provo ad usare il teo. della divergenza.

Considero Ω insieme limitato dalla curva γ e dall'asse x .

Applico teo della divergenza



$$\iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial \Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi^3 + \pi]$$

$$= \int_{\gamma_1} (-B dx + A dy) - \int_{\gamma} (-B dx + A dy)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} -B dx + A dy &= \int_{\gamma_1} (-B dx + A dy) = - \int_0^{\pi^3 + \pi} t \sin(t^3) \cdot 1 \, dt \\ &= \text{si fa} \end{aligned}$$

Occhio all'orientazione. Quello che mi serve è

$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} -A dy + B dx, \text{ quindi alla fine devo cambiare il segno.}$$

↑
vedi formula per $\vec{n}$
ottenuta nel primo modo.

LAPLACIANO IN COORDINATE POLARI

Motivazione Data una funzione $u(x, y)$ il suo laplaciano è

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$$

La funzione u la posso pensare in coord. polari

$$u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = v(\rho, \theta)$$

Posso fare la stessa operazione sul laplaciano, cioè

$$\Delta u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Domanda: quale operazione sulla $v(\rho, \theta)$ produce lo stesso risultato?

Esempio $u(x, y) = x^2 y + y^3$

$$u_x = 2xy \quad u_{xx} = 2y$$

$$u_y = x^2 + 3y^2 \quad u_{yy} = 6y$$

Quindi

$$\Delta u(x, y) = 8y \quad \Delta u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 8\rho \sin \theta$$

$$v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta + \rho^3 \sin^3 \theta$$

$$= \rho^3 \sin \theta$$

Quale operazione su v produce $8\rho \sin \theta$

Conto $u(p, \theta) = u(p \cos \theta, p \sin \theta)$. Calcolo con la chain rule le derivate parziali

$$u_p = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$

$$u_\theta = -u_x p \sin \theta + u_y p \cos \theta$$

$$u_{pp} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$$u_{\theta\theta} = u_{xx} p^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} p^2 \cos \theta \sin \theta + u_{yy} p^2 \cos^2 \theta - u_x p \cos \theta - u_y p \sin \theta$$

Quindi

$$\begin{aligned} u_{pp}(p, \theta) + \frac{1}{p^2} u_{\theta\theta}(p, \theta) &= u_{xx}(p \cos \theta, p \sin \theta) + u_{yy}(\dots, \dots) \\ &\quad - u_x \frac{1}{p} \cos \theta - u_y \frac{1}{p} \sin \theta \rightarrow \frac{1}{p} u_p \\ &= \Delta u(p \cos \theta, p \sin \theta) \end{aligned}$$

Concludendo

$$\Delta u = u_{pp} + \frac{1}{p^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{p} u_p$$

Nell'esempio in effetti $u = p^3 \sin \theta$

$$u_p = 3p^2 \sin \theta$$

$$u_\theta = p^3 \cos \theta$$

$$u_{pp} = 6p \sin \theta$$

$$u_{\theta\theta} = -p^3 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} u_{pp} + \frac{1}{p^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{p} u_p &= 6p \sin \theta - p \sin \theta + 3p \sin \theta \\ &= 8p \sin \theta \quad \text{😊} \end{aligned}$$

Esercizio trovare tutte le funzioni radiali tali che $\Delta u = 0$

Passando in coord. polari si ottiene che $u(p, \theta)$ non dipende da θ , quindi $u_{\theta\theta} = 0$. Quindi bisogna risolvere

$$u_{pp} + \frac{1}{p} u_p = 0$$

Ponendo $y(p) = u_p(p)$ abbiamo $\dot{y} + \frac{1}{p} y = 0$

che è una equazione del 1° ordine a variabili separabili

$$\dot{y} = -\frac{1}{\rho} y \quad \leadsto \quad \frac{dy}{y} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad \leadsto \quad \log |y| = -\log \rho + c$$

$\leadsto |y| = \frac{k}{\rho}$ per una opportuna costante $k \in \mathbb{R}$, quindi

$$v_\rho(\rho) = \frac{k}{\rho} \quad \leadsto \quad \boxed{v(\rho) = k \log \rho + c}$$

Tranne quella con $k=0$, tutte le altre divergono nell'origine.
— o — o —

Esercizio Fare Laplaciano in coord. sferiche e trovare le sol. radiali di $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3$.
— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 066

Titolo nota

11/12/2015

DIMOSTRAZIONI DI GAUSS-GREEN IN DIMENSIONE 2

Teo. divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Se poniamo $\vec{E} = (A, B)$ si può riscrivere come

$$\iint_{\Omega} (A_x + B_y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} (-B \, dx + A \, dy)$$

↑
curva o insieme di curve che percorrono $\partial\Omega$ con l'orientazione giusta

Corollario (Dimenticato a suo tempo)

Data $f(x, y)$ e dato $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vale la formula

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Dim Posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$, allora $\frac{\partial f}{\partial v} = v_1 f_x(x, y) + v_2 f_y(x, y)$

Applico teo. divergenza con $\vec{E} = (v_1 f, v_2 f)$. Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial v} \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds & \vec{n} = (n_1, n_2) \\ &= \int_{\partial\Omega} (v_1 f n_1 + v_2 f n_2) \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, ds. \quad \square \end{aligned}$$

— o — o — o —

CASI SPECIALI DEL TED. DIV.

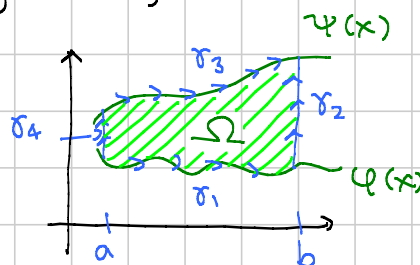
Caso di insieme normale risp. asse x Supponiamo

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

Voglio dimostrare due formule

$$\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -B dx$$

$$\iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy$$



Dim. con B

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy [B_y(x, y)] \\ &= \int_a^b dx [B(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \\ &= \int_a^b [B(x, \psi(x)) - B(x, \varphi(x))] dx \end{aligned}$$

$$\iint_{\partial\Omega^+} -B(x, y) dx = - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = (*)$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, \varphi(t)) & t \in [a, b] & \quad \gamma_2(t) = (b, t) & t \in [\varphi(b), \psi(b)] \\ \gamma_3(t) &= (t, \psi(t)) & t \in [a, b] & \quad \gamma_4(t) = (a, t) & t \in [\varphi(a), \psi(a)] \end{aligned}$$

$$(*) = - \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} = - \int_a^b B(t, \varphi(t)) dt + \int_a^b B(t, \psi(t)) dt$$

e questo dimostra la formula.

Dim A

$$\iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy = \int_a^b dx \underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy}$$

Introduco una nuova funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, y) dy \quad (\text{integrale dipendente da parametro})$$

Calcolo

$$H'(x) = \frac{dH}{dx} = \underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy} + A(x, \psi(x)) \psi'(x) - A(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$$

vado a sostituire sopra

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \left\{ \frac{dH}{dx}(x) - A(x, \psi(x)) \psi'(x) + A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \right\} \\ &= - \int_a^b A(x, \psi(x)) \psi'(x) dx + \int_a^b A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) dx + H(b) - H(a) \end{aligned}$$

Vado ora a calcolare il pezzo di bordo:

$$\int_{\partial\Omega^+} A(x, y) dy = \int_{\sigma_1} + \int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_3} - \int_{\sigma_4}$$

$$\int_{\sigma_1} A(x, y) dy = \int_a^b A(t, \varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\sigma_2} A(x, y) dy = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} A(b, t) dt = H(b)$$

Analogamente

$$\int_{\sigma_4} A(x, y) dy = -H(a) \quad \text{e} \quad \int_{\sigma_3} A(x, y) dy = \text{pezzo mancante}$$

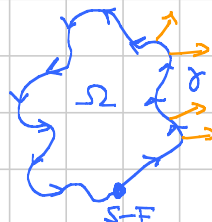
— o — o —

Analogamente si dimostra il teo. della div. negli insiemi normali rispetto all'asse y . (Fare per esercizio)

Interpretazione ciclistica del teo. div.

Se faccio un giro in bici e sento sempre il vento provenire da destra (o da sinistra), allora di sicuro il campo velocità del vento non può avere divergenza nulla!

Se il vento viene da dx, allora $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle < 0$ su tutta la curva, quindi

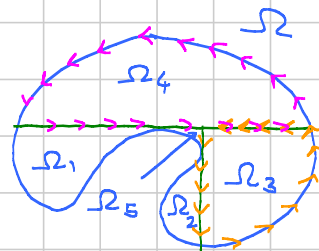


$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy < 0$$

— 0 — 0 —

Conclusione **MOLTO BRUTALE** della dimostrazione nel caso generale

→ Dato un insieme qualunque Ω
(con frontiera ragionevolmente regolare)
lo posso suddividere come unione
di insiemi normali



→ In ogni sottoinsieme Ω_i applico il teo. div. che so essere vero

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy &= \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_i} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial \Omega_i} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \end{aligned}$$

L'ultima somma è fatta da pezzi di $\partial \Omega$ percorsi con il verso giusto, e dai vari tratti intermedi aggiunti fatti due volte con due versi opposti, e che quindi si cancellano.

— 0 — 0 —

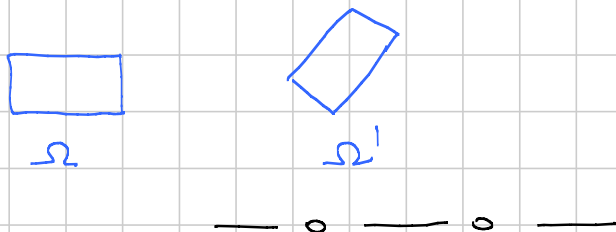
Notazione Spesso i fisici usano notazioni diverse per divergenza, laplaciano, rotore.
In particolare

$$\nabla \cdot \vec{E} = (\partial_x, \partial_y) \cdot (A, B) = A_x + B_y = \text{div } \vec{E}$$

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} = \Delta f$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \text{rot } \vec{E} \quad (\text{in fondo è la matrice che calcola rot } \vec{E})$$

Teorema (esercizio) Se vale il te. della divergenza in un insieme Ω , allora vale in un insieme Ω' ottenuto ruotando Ω di un angolo a piacere.



ANALISI 2

—

LEZIONE 067

Titolo nota

11/12/2015

PARTIZIONI DELL'UNITÀ

Problema generale: c'è un enunciato che funziona in situazioni speciali locali (ad esempio il teo. div. sugli insiemi normali). Voglio dire che funziona in grande.

LOCALE $\rightsquigarrow$ GLOBALE

Supponiamo nel piano di avere una successione $\{R_n\}$ di rettangoli tali che

(i) ricoprono tutto il piano $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int}(R_n)$

(ii) ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ interseca solo un numero finito di rettangoli.

Ad esempio, posso prendere una "quadratura allargata" del piano

Allora esiste una successione di funzioni $\psi_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ con queste proprietà:

$\rightarrow \psi_n(x) = 0$ se $x \notin R_n$ (ψ_n è nulla fuori da R_n)

$\rightarrow \psi_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

↑

questa somma ha un numero finito di addendi
in ogni $x \in \mathbb{R}^2$ per la (ii)

La succ. $\{\psi_n\}$ si dice PARTIZIONE DELL'UNITÀ relativa ad $\{R_n\}$.

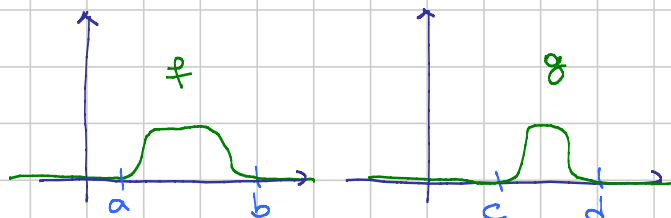
Dim. dell'esistenza

In ogni rettangolo costruisco una funzione C^∞ che è nulla fuori dal rettangolo e positiva dentro. La chiamo $\varphi_m(x)$

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

basta porre

$$\varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$



A questo punto pongo

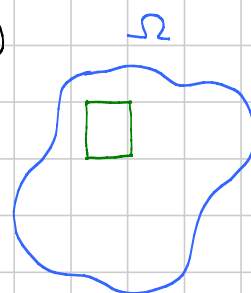
$$\psi_m(x) = \frac{\varphi_m(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)}$$

Osservo che il denominatore è una funzione C^∞ perché su ogni palla B_R è somma di un numero finito di funzioni C^∞ .

— o — o —

Ancora casi speciali del teorema della divergenza

- [1] Supporto di A e B contenuto in un rettangolo $R \subseteq \text{Int}(\Omega)$. Allora vale il teorema della divergenza

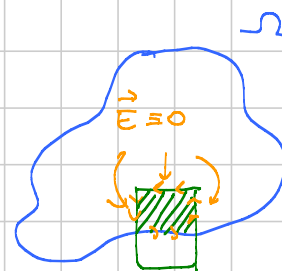


$$\iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} = \iint_R \text{div } \vec{E} = \iint_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = 0 = \iint_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 R è normale $A \in B$ si annullano su ∂R ... su $\partial \Omega$

- [2] Supporto di A e B contenuto in un rettangolo R la cui intersezione con Ω è un insieme normale. Allora anche qui vale tes. div.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} &= \iint_{R \cap \Omega} \text{div } \vec{E} = \int_{\partial(R \cap \Omega)} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \\ &= \int_{\partial \Omega \cap R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \end{aligned}$$



Dim. generale di tes. di A.

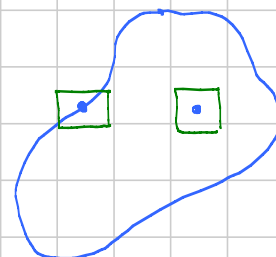
① Prendo Ω . Per ogni punto x costruisco un rettangolo R_x in questo modo

→ se $x \in \text{Int}(\Omega)$ faccio in modo che $R_x \subseteq \text{Int}(\Omega)$

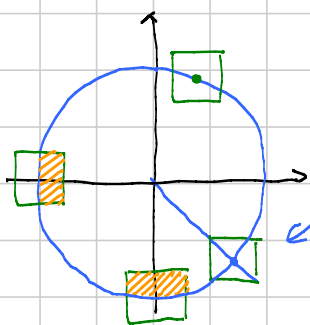
→ se $x \in \partial\Omega$ faccio in modo che $R_x \cap \Omega$ sia un insieme normale

In ogni caso x è il centro di R_x

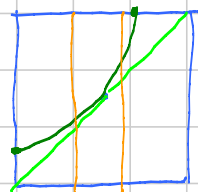
Oss. In alcuni testi si trova la stessa costruzione con i quadrati, ma non funziona!!!



Esempio



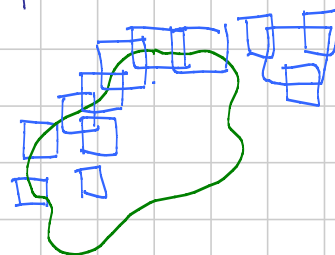
in ogni quadrato centrato in un p.to della diagonale la restrizione tocca due lati adiacenti



I vari R_x pensati come rettangoli aperti, costituiscono un ricoprimento di $\bar{\Omega}$, quindi posso estrarne un sottoricoprimento finito, avendo così un numero finito di rettangoli la cui parti interne ricoprono $\bar{\Omega}$.

A questi posso aggiungere altri rettangoli che non intersecano $\bar{\Omega}$ in modo da ricoprire $\mathbb{R}^2$ come nella partizione dell'unità.

Prendo una partizione dell'unità relativa a questi rettangoli.



$$\iint_{\Omega} A_x dx dy = \iint_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^k \psi_n A \right)_x dx dy$$

$$= \sum_{n=1}^k \iint_{\Omega} (\psi_n A)_x dx dy$$

il supporto è contenuto in un rettangolo "buono", quindi qui vale teorema della divergenza come visto sopra

$$= \sum_{n=1}^k \int_{\partial\Omega^+} (\psi_n A) dy$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} \left(\sum_{n=1}^k \psi_n A \right) dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy$$

Nello stesso identico modo si dimostra che

$$\iint_{\Omega} B_y dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -B dx$$

e questo completa la dimostrazione (che volevo si poteva fare direttamente con $\vec{E}$).

— o — o —

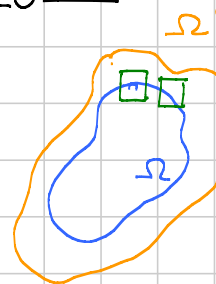
Sotto quali ipotesi abbiamo dimostrato te. divergenza

→ Le componenti di E sono di classe C^1
in un aperto $\Omega' \supset \bar{\Omega}$

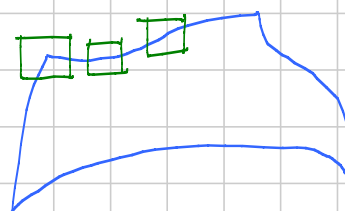
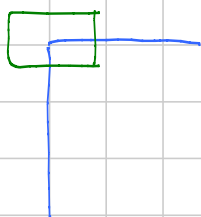
→ In ogni punto di $\partial\Omega$ esiste un rettangolo R
centrato in quel punto tale che

$$\Omega \cap R$$

è un insieme normale rispetto all'asse x o all'asse y .



Osservazione Questo sistema il teorema se Ω è regolare.
Se ω sono degli angoli



Negli angoli non c'è un rettangolo "dritto", ma magari c'è un rettangolo ruotato



normale rispetto a questa base

Morale: se dimostro la formula per gli insiemi ruotati posso gestire anche insiemi Ω con $\partial\Omega$ regolare a tratti (e volendo usare sempre i quadrati)

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 068

Titolo nota

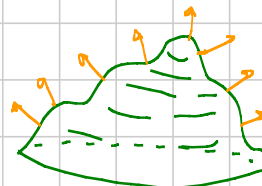
15/12/2015

ORIENTAZIONE DI UNA SUPERFICIE

Una orientazione di una superficie è una scelta continua del vettore normale.

Se la sup. è descritta parametricamente da

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$



allora le due orientazioni possibili sono date da

$$\vec{n} = \pm \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}$$

dove $(M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$

Orientazione del bordo di una superficie

Achtung! Il bordo di una superficie NON è la sua frontiera topologica !!!



bordo della
semisfera

Se S è il supporto della semisfera, la sua frontiera topologica è lei stessa

Semidef. Se la superficie è data una parametrizzazione

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

↑ chiusura di un aperto in $\mathbb{R}^2$

allora definiamo bordo della superficie la curva (o le curve) che si ottengono come immagine di $\partial\Omega$

↑ frontiera topologica di Ω in $\mathbb{R}^2$

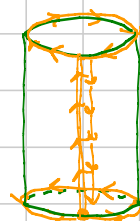
Achtung! Pensiamo ad un cilindro:

$$(\vartheta, z) \rightarrow (\cos \vartheta, \sin \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$

$$[0, 2\pi] \times [0, 4] = \Omega$$

In questo caso l'immagine di $\partial\Omega$ è.

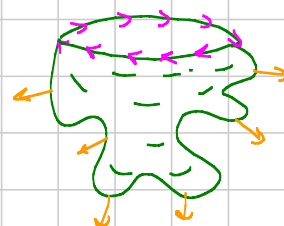
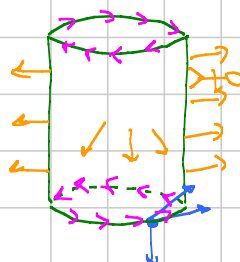
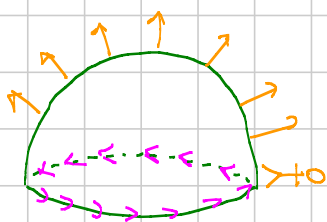


Orientare il bordo di una sup. vuol dire scegliere un verso di percorrenza in ogni curva che compone il bordo. Quale scegliere?

Orientazione canonica del bordo di una sup. orientata

È il verso in cui deve percorrere il bordo un quindici a piedi secondo l'orientazione della sup. in modo da lasciare la sup. alla sua sinistra

Esempi



Detto meglio: i seguenti 3 vettori nell'ordine

→ normale esterna alla sup (qui messo nel piano tg. e p. into fuori)

→ tangente al bordo

→ vettore normale alla sup

devono essere una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la base canonica

Fatto generale: se la sup. è orientata da $\Phi_u \wedge \Phi_v$, allora il bordo è orientato prendendo $\partial\Omega$ lasciando Ω a sx.

FORMULA DI STOKES

TEOREMA DEL ROTORE

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

vettore tangente al bordo

Detto dai fisici: il flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso la superficie è uguale alla circolazione di $\vec{E}$ lungo il bordo della superficie.

Supponiamo $\vec{E} = (A, B, C)$ e supponiamo S parametrizzata da $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Allora

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y) \cdot \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\| (M_1, M_2, M_3) \|} \cdot \| (M_1, M_2, M_3) \| du dv$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} M_1 (C_y - B_z) + M_2 (-C_x + A_z) + M_3 (B_x - A_y) du dv$$

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\partial S^+} A dx + B dy + C dz$$

↑
bordo di S orientato come
indicato precedentemente

Supponiamo che $x(t), y(t), z(t)$ percorrano ∂S . Allora

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int (A, B, C) \cdot \frac{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \sqrt{\dots} dt = \int A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}$$

COME DETERMINO SE UN CERTO VETTORE È UN ROTORE?

$$(x+y, x-y+z^2, z-3)$$

Guardo la divergenza! Se $\text{div} \neq 0$, allora NON può essere un rotore!!! Abbiamo visto infatti che $\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0$

$$1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{NO rotore}$$

Se invece la $\text{div} = 0$, allora può essere un rotore e lo è se l'insieme di definizione è un parallelepipedo

Esempio $\vec{F} = (x+y, y+zx, -2z+x^2y)$

$\text{div } \vec{F} = 1+1-2=0$. $\vec{F}$ è definito ovunque, quindi esiste E tale che $\text{rot } \vec{E} = \vec{F}$.

Come trovo $\vec{E}$? Pongo $\vec{E} = (A, B, C)$. Devo risolvere

$$\begin{cases} C_y - B_z = x+y \\ -C_x + A_z = y+zx \\ B_x - A_y = -2z+x^2y \end{cases}$$

Batteriamo $C \equiv 0$:

$$\begin{aligned} -B_z &= x+y && \leadsto B_z = -xz - yz + \varphi(x,y) \\ A_z &= y+zx && \leadsto A = yz + \frac{1}{2}z^2x + \psi(x,y) \\ B_x - A_y &= -2z+x^2y \end{aligned}$$

Battero $= 0$ una delle due funzioni φ e ψ , ad esempio $\psi(x,y)$

$$B = -xz - yz + \varphi(x,y), \quad A = yz + \frac{1}{2}z^2x$$

Sostituisco nella 3ª relazione e trovo $\varphi(x,y)$:

$$B_x - A_y = \cancel{-z} + \varphi_x - \cancel{z} = -\cancel{2z} + x^2y \quad \varphi_x = x^2y$$

la semplificazione segue dalla div $\Rightarrow$

$$\leadsto \varphi = \frac{1}{3} x^3 y.$$

In conclusione $\vec{E} = (yz + \frac{1}{2} z^2 x, -xz - yz + \frac{1}{3} x^3 y, 0)$

Domanda successiva: come sono fatti tutti gli $\vec{E}$ t.c. $\text{rot} \vec{E} = \vec{F}$

Se ho un'altra soluzione $\text{rot} \vec{E}_1 = \vec{F}$, allora

$$\text{rot} (\vec{E}_1 - \vec{E}) = 0 \quad \leadsto \vec{E}_1 - \vec{E} = \nabla \varphi \quad \text{per una opportuna } \varphi(x, y, z)$$

Se volessi ottenere $y \sin R z$ alla terza componente, basta aggiungere

$$\nabla (y \cos R z)$$

Conclusione : c'è tanta libertà nella scelta di $\vec{E}$ tale che $\text{rot} \vec{E} = \vec{F}$ dato.

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 069

Titolo nota

15/12/2015

QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN INTEGRALE DI FLUSSO

Situazione classica: sono dati

- una superficie
- una orientazione della sup.
- un campo $\vec{E} = (A, B, C)$

Obiettivo: calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

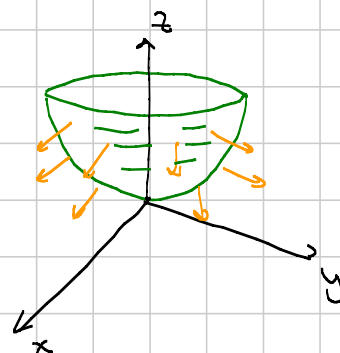
Flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie

ROAD MAP 1 Usare formula diretta, quindi

- ① Scrivo una param. di S
- ② Controllo il segno da mettere a (M_1, M_2, M_3) per avere l'orientazione giusta
- ③ Calcolo

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv.$$

Esempio $z = x^2 + y^2, z \leq 1$
 $\vec{n} = \text{"verso il basso"}$
 $\vec{E} = (x, y - z, xy - 2z)$

① $\vec{E}$ una sup. cartesiana, quindi

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \quad \text{con } \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

② $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
 $\Phi_v = (0, 1, 2v)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

Ha il segno giusto? Nell'origine diventa $(0, 0, 1)$, quindi il segno è sbagliato, quindi bisogna mettere un $-$

③ Calcolo finale

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \oint_{\Omega} AM_1 + BM_2 + CM_3 \, du \, dv \\ &= - \int_{\Omega} \underbrace{u}_{\uparrow A} \underbrace{(-2u)}_{\uparrow M_1} + \underbrace{(v - u^2 - v^2)}_{\uparrow B} \underbrace{(-2v)}_{\uparrow M_2} + \underbrace{(uv - 2u^2 - 2v^2)}_{\uparrow C} \underbrace{1}_{\uparrow M_3} \\ &= \int_{u^2 + v^2 \leq 1} [2u^2 + 2v(v - u^2 - v^2) + (2u^2 + 2v^2 - uv)] \, du \, dv \\ &= \text{integrale doppio tranquillo.} \end{aligned}$$

Vantaggi / svantaggi della RM 1 $\rightarrow$ si può usare sempre
 $\rightarrow$ occorre calcolare (M_1, M_2, M_3)
 — o — o —

ROAD MAP 2 Sperare su Stokes

- ① Spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$
- ② TROVO $\vec{F}$
- ③ Uso Stokes

Applichiamolo all'esempio di prima

$$\textcircled{1} \vec{E} = (x, y-z, xy-2z) \quad \text{div } \vec{E} = 1+1-2=0 \quad \text{si!} \quad \textcircled{\smiley}$$

② Trovo $\vec{F}$ $(C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y) = \vec{E}$

Poniamo $B=0$ $C_y = x$ $C = xy + \varphi(x, z)$
 $-C_x + A_z = y - z$
 $-A_y = xy - 2z$ $A = -\frac{1}{2}xy^2 + 2zy$

Sostituisco nella 2ª:

$$-y - 0x + 2y = y - z \quad \leadsto \quad \varphi(x, z) = zx$$

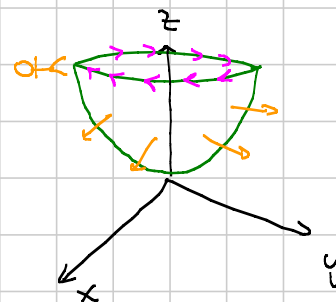
Conclusione $\vec{F} = (\underbrace{-\frac{1}{2}xy^2 + 2zy}_{\hat{A}}, \underbrace{0}_{\hat{B}}, \underbrace{xy + xz}_{\hat{C}})$

③ Use Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\partial S^+} \hat{A} dx + \hat{B} dy + \hat{C} dz$$

Non resta che scrivere per bene ∂S , con l'orientazione giusta!

$$(\cos\theta, \sin\theta, 1) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



con l'orientazione cambiata.

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \bigcirc \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cos\theta \sin^2\theta + 2\sin\theta\right)}_{\hat{A}} \underbrace{(-\sin\theta)}_{\hat{C}} d\theta$$

I termini con $\hat{B} dy$ vengono 0 e anche $\hat{C} dz$ produce solo 0 perché $\vec{z}(t) = 0$.

= si fa in un istante (controllare che venga lo stesso).

Vantaggi / svantaggi $\rightarrow$ serve $\text{div } \vec{E} = 0$ $\rightarrow$ l'integrale finale è 1-dim
 $\rightarrow$ bisogna trovare $\vec{F}$

ROAD MAP 3 Uso Stokes senza inventare il rotore

- ① Spero che $\vec{E}$ sia $\text{rot } \vec{F}$ per un certo $\vec{F}$
- ② Cambio la sup. con una che ha lo stesso bordo.
- ③ Calcolo il flusso sulla nuova superficie.

Oss. fondamentale Se $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ e $\partial S_1 = \partial S_2$, allora

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Dim.

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \stackrel{\vec{E} = \text{rot } \vec{F}}{\downarrow} = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$\text{Stokes} \rightarrow = \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds$$

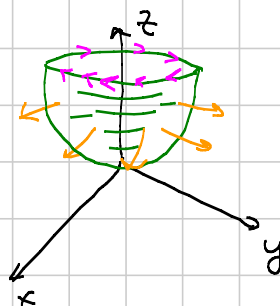
$$\text{stesso bordo} \rightarrow = \int_{\partial S_2} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$= \int_{S_2} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Nell'esempio

$$\textcircled{1} \text{ Ok, } \vec{E} = \text{rot } \vec{F}$$

- ② Scelgo una sup. con lo stesso bordo.
In questo caso prendo il cerchio superiore, orientato con la normale verso il basso.



$$S_2 = (x, y, 1) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- ③ Calcolo il flusso su S_2

$$\int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (xy - 2) \cdot (-1) dx dy = \text{banale}$$

$\uparrow$
 $(0, 0, -1)$

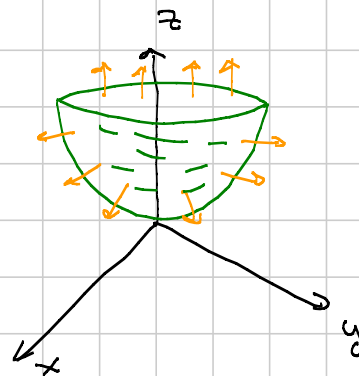
Vantaggi / svantaggi : $\rightarrow$ serve $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
 $\rightarrow$ non serve trovare $\vec{F}$
 $\rightarrow$ resta integrale 2-dim.
 — o — o —

ROAD MAP 4 Uso Gauss-Green dopo aver chiuso il dominio !!

- ① Chiudo il dominio
- ② Uso Gauss-Green

Nell'esempio, considero il solido
 $V \subseteq \mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$$



Gauss-Green dice che

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$
normale esterna a V

e nel nostro caso $\iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{\text{quello che serve a noi}} + \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

$\uparrow$
(0,0,1)

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz - \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Vantaggi / svantaggi

- $\rightarrow$ Funziona sempre (non serve che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$)
 - $\rightarrow$ Bisogna calcolare un integrale 3-dim. e uno 2-dim.
- o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 070

Titolo nota

16/12/2015

Dimostrazione della formula di Stokes

Strategia: parametrizzo la superficie, riporto tutto in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e lì uso Gauss-Green

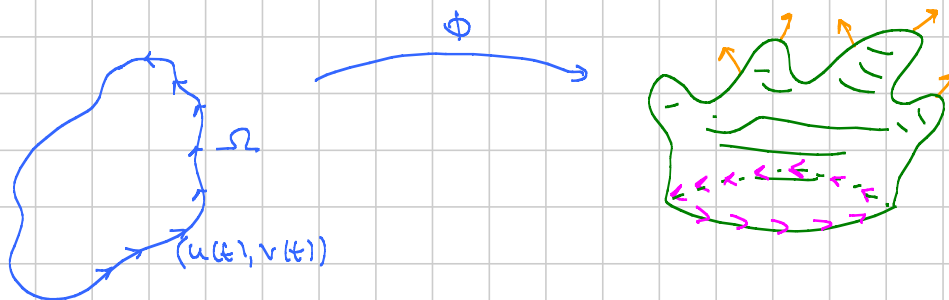
$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} A dx + B dy + C dz \quad \vec{E} = (A, B, C)$$

Fissiamo una parametrizzazione di S :

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto abbastanza regolare

Chiamiamo (u, v) le variabili in Ω e poniamo

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$



Supponiamo che $\partial\Omega$ sia il supporto di una o più curve

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [a, b]$$

che lo percorrono lasciando Ω a sinistra. In queste ipotesi il bordo ∂S è percorso positivamente dalla curva

$$(x(t), y(t), z(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$$

Dim. di Stokes Scrivo RHS e LHS usando la parametrizz.

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

Allora

$$\text{LHS} = \int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{m} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (C_y - B_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (-C_x + A_z)(-x_u z_v + z_u x_v) + (B_x - A_y)(x_u y_v - y_u x_v) du dv$$

Volevo posso espandere il prodotto ... limitiamoci a scrivere i 4 termini con la A ...

$$\boxed{A_z (-x_u z_v + z_u x_v) - A_y (x_u y_v - y_u x_v)}$$

↓
 $A_z(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) [-x_u(u,v) z_v(u,v) + \dots]$

Occupiamoci ora del RHS:

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\partial S^+} A dx + B dy + C dz \\ &= \int_a^b A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + B(\dots) \dot{y}(t) + C(\dots) \dot{z}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \rightsquigarrow \dot{x}(t) = x_u(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + x_v(\dots) \dot{v}(t) \\ &\rightsquigarrow \dot{y}(t) = y_u(\dots) \dot{u}(t) + y_v(\dots) \dot{v}(t) \\ &\rightsquigarrow \dot{z}(t) = z_u(\dots) \dot{u}(t) + z_v(\dots) \dot{v}(t) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= \int_a^b \int_a^b A(\dots)(X_u \dot{u} + X_v \dot{v}) + B(\dots)(Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}) + C(\dots)(Z_u \dot{u} + Z_v \dot{v}) \\
 &= \int_a^b \underbrace{(AX_u + BY_u + CZ_u)}_{A(X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))} \dot{u} + \underbrace{(AX_v + BY_v + CZ_v)}_{\hat{E}} \dot{v} \, dt \\
 &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{(AX_u + BY_u + CZ_u)}_{\hat{D}} du + \underbrace{(AX_v + BY_v + CZ_v)}_{\hat{E}} dv \\
 &= \text{integrale di una forma differenziale su } \partial\Omega
 \end{aligned}$$

Applico Gauss-Green in Ω

$$\iint_{\Omega} (\hat{E}_u - \hat{D}_v) du dv = \int_{\partial\Omega} \hat{D} du + \hat{E} dv$$

Questa arriva dalla classica

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, du dv &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds & \vec{E} &= (A, B) \\
 \iint_{\Omega} (A_u + B_v) du dv &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{A dv}_{\hat{E}} - \underbrace{B du}_{\hat{D}}
 \end{aligned}$$

Morale

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= \int_{\partial\Omega} \hat{D} du + \hat{E} dv = \iint_{\Omega} (\hat{E}_u - \hat{D}_v) du dv \\
 &= \iint_{\Omega} (AX_v + BY_v + CZ_v)_u \\
 &\quad - (AX_u + BY_u + CZ_u)_v
 \end{aligned}$$

Se faccio le derivate o ottengo quello che c'era al LHS ho finito.

Nel fare il conto, limitiamoci ai termini con la A :

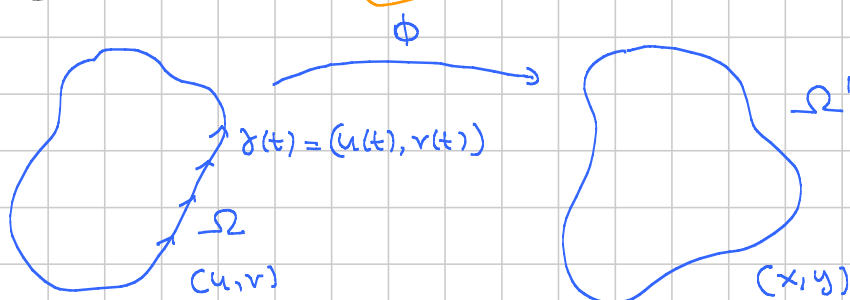
$$\cancel{A_x X_u X_v} + A_y Y_u X_v + A_z Z_u X_v + \cancel{A X_{uv}} \\ - \cancel{A_x X_v X_u} - A_y Y_v X_u - A_z Z_v X_u - \cancel{A X_{uv}}$$

$$= \underbrace{A_y (Y_u X_v - Y_v X_u)}_{\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}} - A_z (Z_v X_u - Z_u X_v)$$



Back to cambio di variabili negli integrali

Due variabili



Aggiunto dopo video: a guardarla bene questa dimostrazione non usa che $\text{Det } J_\phi$ ha un segno fisso in Ω . Basta sapere se ϕ conserva o no il verso di percorrenza del bordo per sistemare i segni (e ovviamente che $\phi(\partial\Omega) = \partial\Omega'$).

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v)) \quad \text{invertibile}$$

$\partial\Omega'$ è parametrizzato, non so in che verso, da $\phi(\gamma(t))$, cioè

$$(x(t), y(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)))$$

Data $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ voglio calcolare $\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy$.

Introduco una funzione $F(x, y)$ t.c. $F_x(x, y) = f(x, y)$.

Inizio il conto:

$$\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} \text{div}(F(x, y), 0) dx dy$$

$$(\text{Gauss-Green}) = \int_{\partial\Omega'} F(x, y) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \int_a^b F(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \\
&= \pm \int_a^b F(x(u(t), v(t)), Y(\dots)) [Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}] dt \\
&= \pm \int_a^b F(\dots) Y_u \dot{u} + F(\dots) Y_v \dot{v} dt \\
&= \pm \int_{\partial\Omega} F(\dots) Y_u du + \underbrace{F(\dots) Y_v}_{\downarrow F(x(u,v), Y(u,v)) Y_v(u,v)} dv \\
&= (\text{Gauss-Green in } \Omega) = \pm \iint_{\Omega} [F Y_v]_u - [F Y_u]_v du dv \\
&= \pm \iint_{\Omega} \{ F_x X_u Y_v + F_y \cancel{Y_u Y_v} + F_x \cancel{Y_u} - F_x X_v Y_u - F_y \cancel{Y_x Y_u} - F_y \cancel{Y_{uv}} \} \\
&= \pm \iint_{\Omega} f(x(u,v), Y(u,v)) \underbrace{\{ X_u Y_v - X_v Y_u \}}_{J\phi(u,v)} du dv
\end{aligned}$$

Per decidere il segno, uso $f(x,y) \equiv 1$: all'inizio trovo $\text{Area}(\Omega)$, alla fine

$$\pm \iint_{\Omega} J\phi(u,v) du dv$$

$\uparrow$ sempre pos. o sempre negativo,
 quindi il segno giusto è quello che
 fa comparire il valore assoluto.

— o — o —

Vantaggi di questa d'm: dura $\frac{1}{3}$ di les. contro 3 lezioni

Svantaggi:

- è semplice solo in $\mathbb{R}^2$ → serve $\partial\Omega$ regolare
- ho usato che ϕ è C^2 e si estende fino al bordo
- ho assunto f almeno continua
- usa G.G. che è avanzato rispetto agli integrali.

ANALISI 2

—

LEZIONE 071

Titolo nota

16/12/2015

BACK TO INVERSIONE ROTORE

Dato campo $\vec{E}$, trovare $\vec{F}$ tale che $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$

① Cond. nec. è che $\text{div } \vec{E} = 0$. Se non succede, non è possibile.

② Se $\text{div } \vec{E} = 0$ e siamo su un parallelepipedo, allora è possibile trovare $\vec{F}$

Dim $\vec{E} = (A, B, C)$ $\hat{F} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ e voglio che

$$\text{rot } \vec{F} = (\hat{C}_y - \hat{B}_z, -\hat{C}_x + \hat{A}_z, \hat{B}_x - \hat{A}_y)$$

Prima semplificazione: scelgo $\hat{C} \equiv 0$ e mi riduco a risolvere

$$\begin{array}{ll} -\hat{B}_z = A & \leadsto \text{Pongo } \hat{B} = -\overset{\bar{A}}{\text{primitiva di } A \text{ in } z} + \psi(x, y) \\ \hat{A}_z = B & \leadsto \text{Pongo } \hat{A} = \text{primitiva di } B \text{ in } z + \psi(x, y) \\ \hat{B}_x - \hat{A}_y = C & \end{array}$$

Seconda semplificazione: scelgo $\psi(x, y) \equiv 0$. Sostituisco nella terza equazione e ritraro

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C \leadsto -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \psi_y = C \leadsto$$

$$\leadsto \psi_y = \bar{A}_x + \bar{B}_y + C$$

deve essere
funzione di solo
 x e y

Non dipende da z

$$(\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z = \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z = A_x + B_y + C_z = \text{div } \vec{E} = 0.$$

Domanda : dove ho usato che siamo in un parallelepipedo ?

③ Se non siamo in un parallelepipedo, la condizione $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ NON implica in generale che $\vec{E}$ è un rotore.

Esempio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{origine}$

$$\vec{E} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = (A, B, C)$$

$$\begin{aligned} A_x &= \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]_x = \frac{1}{(\dots)^{3/2}} - x \cdot \frac{3}{2} \frac{2x}{(\dots)^{5/2}} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(\dots)^{5/2}} \end{aligned}$$

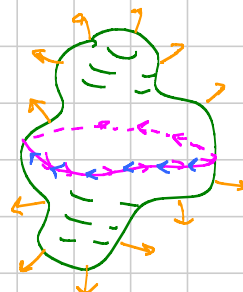
Facciamo l'analogo per B_y e C_z scopro che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

Fatto generale Il flusso di un rotore attraverso una sup. chiusa (non topologicamente, ma senza bordo) è sempre uguale a zero.

Dim. un po' brutale $\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \dots$

se è $\emptyset$ viene 0.

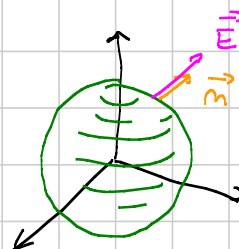
In alternativa, si può pensare la sup. chiusa come unione di 2 sup. con bordo. Facendo i 2 Stokes i termini di bordo si elidono.



Criterio Per dimostrare che $\vec{E}$ non è un rotore basta trovare una sup. chiusa sulla quale abbia flusso $\neq 0$.

Per il campo $\vec{E}$ dato precedentemente basta prendere una sfera centrata nell'origine ed il flusso diventa positivo

Oss. Il campo $\vec{E}$ precedente si può scrivere come rotore in tutti i semispazi del tipo $z > 0$, $z < 0$, $x > 0$, $x + y < 0$. Volendo è un rotore puro in $\mathbb{R}^3 \setminus$ semiasse qualunque (provare a scrivere di cosa è rotore)



Nella dim. del p.to ②, così come nella dim. del cambio di variabili a partire da GG, il passaggio non scontato sono le primitive rispetto ad una variabile.

Non è così scontato che dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, esiste $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F_z(x, y, z) = f(x, y, z)$ in tutto Ω .

Questo è evidente solo localmente, ad esempio in un parallelepipedo.

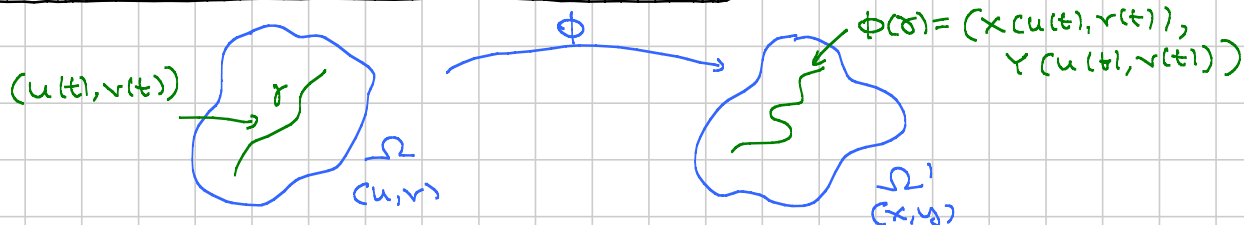


Se voglio la primitiva in y potrei porre

$$F(x, y) = \int_0^y f(x, t) dt$$

— o — o —

PULL BACK DI FORME DIFFERENZIALI



$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Data una forma diff. in Ω'

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

Posso ottenere una forma ω' su Ω tale che

$$\int_{\gamma} \omega' = \int_{\phi(\gamma)} \omega$$

per ogni curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$. Chi è ω' ?

Facciamo il conto

$$\begin{aligned} \int_{\phi(\gamma)} \omega &= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\ &= \int_a^b [A(\dots)[x_u \dot{u} + x_v \dot{v}] + B(\dots)[y_u \dot{u} + y_v \dot{v}]] dt \\ &= \int_a^b (A x_u + B y_u) \dot{u} + (A x_v + B y_v) \dot{v} \\ &= \int_{\gamma} [A(x(u,v), y(u,v)) x_u(u,v) + B(\dots) y_u(\dots)] du \\ &\quad + [A(\dots) x_v + B(\dots) y_v] dv \end{aligned}$$

Quindi

$$\omega' = (A(\dots) x_u + B y_u) du + (A x_v + B y_v) dv$$

Interpretazione brutale di come tornano indietro le formule

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) & y &= y(u,v) \\ dx &= x_u du + x_v dv & dy &= y_u du + y_v dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A dx + B dy &\leadsto A(x(u,v), y(u,v)) (x_u du + x_v dv) \\ &\quad + B(\dots) (y_u du + y_v dv) \end{aligned}$$

Facendo il conto brutale torna la formula ottenuta rigorosamente sopra.

ANALISI 2

LEZIONE 072

Titolo nota

24/02/2016

Seconda parte di Analisi 2

	Teoria	Esercizi
① Spazi metrici	80%	20%
② Varietà : $\rightarrow$ teo. funzione implicita	40%	30%
$\rightarrow$ " " inversa		
$\rightarrow$ moltiplicatori di Lagrange		
③ Successioni e serie di Funzioni	30%	40%
④ Equazioni differenziali	30%	40%

SPAZI METRICI - BANACH - HILBERT

 $X \rightarrow$ insieme $\rightarrow$ nozione di convergenza ("lista delle succ. convergenti") $\rightarrow$ spazio topologico $\rightarrow$ spazio metrico $\rightarrow$ spazio di Banach $\rightarrow$ " " Hilbert $\rightarrow \mathbb{R}^n$

spazi vettoriali

DISTANZA Sia X un insieme. Una distanza su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(d1) $d(x, y) \geq 0$ per ogni x, y in X (d2) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (d3) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni x, y in X

(simmetria)

(d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni x, y, z

(disug. triang.)

Def. Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove

- X è un insieme

- d è una distanza su X .

Achtung! Nel verificare che d è una distanza, occorre controllare anche

(do) d è definita su tutto $X \times X$.

Esempi

① "Distanza discreta": X insieme qualunque

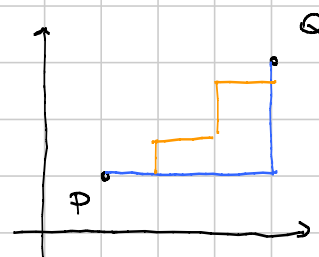
$$d(x, y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

② $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea $x = (x_1, \dots, x_n)$
 $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d(x, y) := \left\{ \sum (y_i - x_i)^2 \right\}^{1/2}$$

③ $\mathbb{R}^n$ con la distanza "taxi driver"

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$$



④ $\mathbb{R}^n$ con la distanza del max:

$$d(x, y) := \max \{ |y_i - x_i| : i = 1, \dots, n \}$$

⑤ $\mathbb{R}^n$ con la "distanza p -esima" ($p \geq 1$)

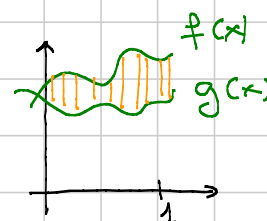
$$d_p(x, y) := \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right\}^{1/p}$$

$p=1 \rightsquigarrow$ taxi driver
 $p=2 \rightsquigarrow$ Euclidea
 $p=+\infty \rightsquigarrow$ max

(la triangolare non è ovvia)

⑥ $X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate}\}$

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0, 1] \}$$



NORMA Sia V uno sp. vett. reale. Una norma su V è una funzione $n: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (n0) $n(v) \geq 0$ per ogni $v \in V$
- (n1) $n(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (n2) $n(\lambda v) = |\lambda| \cdot n(v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$
- (n3) $n(v+w) \leq n(v) + n(w)$ per ogni v e w in V

Notazione: $n(v) = \|v\|$

Fatto decisivo Se $\|v\|$ è una norma, allora

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

è una distanza su V

PRODOTTO SCALARE ... funzione $\langle v, w \rangle$...

- bilineare
- simmetrico
- definito positivo (cioè $\langle v, v \rangle > 0$ per ogni $v \in V$)

Fatto decisivo Dato un prodotto scalare in V

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

è una norma su V .

— 0 — 0 —

Dalla metrica segue una nozione di convergenza:

se (X, d) è sp. metrico e $\{x_n\} \subseteq X$ e $x_\infty \in X$, allora

$$\underbrace{x_n \rightarrow x_\infty}_{\substack{\uparrow \\ \text{limite in } X}} \quad \text{se} \quad \underbrace{d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0}_{\substack{\uparrow \\ \text{limite in } \mathbb{R}}}$$

Dalla metrica segue tutto il linguaggio topologico

- p.to interno, parte interna, aperto
- " aderente, chiusura, chiuso
- frontiera
- p.ti isolati
- p.ti di accumulazione, insieme derivato.

Def. Uno spazio metrico (X, d) si dice **COMPLETO** se tutte le successioni di Cauchy a valori in X convergono.
Una succ. $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m \geq n_0 \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Def. Spazio di Banach = sp. vett. con norma che lo rende completo

Spazio di Hilbert = stessa cosa con in più la norma che deriva da un prodotto scalare.

Lemma In uno sp. metrico (X, d) le succ. conv. sono di Cauchy

Dim. Dato $\varepsilon > 0$, per def. di lim. so che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$d(x_n, x_\infty) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Dico che n_0 va bene nella def. di succ. di Cauchy.

Infatti per ogni $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_\infty, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lipschitzianità e Hölderianità sono proprietà metriche

Def. Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici.

Una $f: X \rightarrow Y$ si dice α -Hölderiana con costante H se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq H [d(x, y)]^\alpha \quad \forall (x, y) \in X^2$$

Def. La stessa f si dice unif. continua se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad \forall (x, y) \in X^2 \text{ con } d(x, y) \leq \delta$$

Esercizio Il prodotto di due funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: X \rightarrow \mathbb{R}$$

uniformemente continue e limitate è ancora u.c.

ANALISI 2

LEZIONE 073

Titolo nota

24/02/2016

Continuità in spazi metriciSiano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici.Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.Sia $x_0 \in X$.Cosa vuol dire che f è continua in x_0 .

Per succ. Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_0$ in X si ha che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ in Y

$\varepsilon - \delta$ Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste almeno un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X \text{ con } d_x(x, x_0) \leq \delta \text{ si ha } d_y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$

Teorema f è continua per succ. $\Leftrightarrow f$ è continua $\varepsilon - \delta$

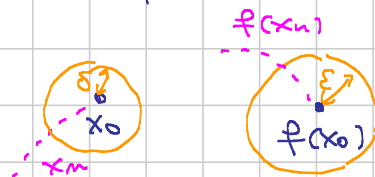
Dim. (Stessa di Analisi 1)

$\Leftarrow$ Prendo $x_n \rightarrow x_0$ e voglio far vedere che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.
Prendo $\varepsilon > 0$ e trovo il δ corrispondente. Trovo poi $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$d_x(x_n, x_0) \leq \delta \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora

$$d_y(f(x_n), f(x_0)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$



$\Rightarrow$ Per assurdo supponiamo f non continua $\varepsilon - \delta$ in x_0 .
Neghiamo:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \text{ con } d_x(x, x_0) \leq \delta \text{ e } d_y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

La uso con $\delta = \frac{1}{n}$ e ottengo $x_n \in X$ con

$$\underbrace{d_X(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \underbrace{d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0}$$

$$x_n \rightarrow x_0$$

$$\text{non può essere } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

— 0 — 0 —

Def. Due distanze d_1 e d_2 in un insieme X si dicono equivalenti se e solo se inducono la stessa nozione di convergenza, cioè per ogni successione x_n e ogni punto x_∞ vale

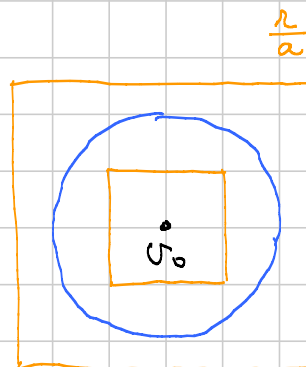
$$d_1(x_n, x_\infty) \rightarrow 0 \iff d_2(x_n, x_\infty) \rightarrow 0$$

Def. Due norme $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ su uno spazio vettoriale V si dicono equivalenti se esistono due costanti $A \geq a > 0$ tali che

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq A \|x\|_1 \quad \forall x \in V$$

In termini di palle questo vuol dire che ogni palla di raggio r rispetto alla norma $\| \cdot \|_2$ è

- contenuta in una palla di raggio $\frac{r}{a}$ rispetto alla $\| \cdot \|_1$
- contiene una palla di raggio $\frac{r}{A}$ rispetto alla $\| \cdot \|_1$



Dim. $\|x\|_2 \leq r$, allora $a\|x\|_1 \leq r$
 $\Rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{r}{a}$
 e analogo dall'altra parte.

Esempio In $\mathbb{R}^n$ l'euclidea e la taxi driver sono equiv. e

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Teorema Due qualunque norme su uno sp. vett. di dim. FINITA sono equivalenti.

La dimostrazione è un corollario di

Teorema Una qualunque norma su $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla Euclidea.

Dim. Sia $\|x\|$ una norma qualunque su $\mathbb{R}^n$. Voglio dimostrare che esistono a ed A tali che

$$a \|x\| \leq \|x\| \leq A \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↖ Euclidea ↗

Ci basta dimostrare che esistono $a > 0$ ed $A > 0$ t.c.

$$a \leq \frac{\|x\|}{\|x\|} \leq A \quad \forall x \text{ con } \|x\| = 1$$

Questo è vero per omogeneità della funzione $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|}$.

Ora la sfera $\|x\| = 1$ è compatta, ma ci manca (per ora) la continuità di $f(x)$.

Step 1 Mostro a mano la disug. di dx. Prendo $x \in \mathbb{R}^n$ e lo scrivo nella base canonica

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$$

$$\begin{aligned}
 \|x\| &= \left\| \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|c_k e_k\| \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{triangolare} \\
 &\quad \text{+ inclusione} \\
 &= \sum_{k=1}^m |c_k| \cdot \|e_k\| \\
 &= \sum_{k=1}^m |c_k| \cdot \frac{\|e_k\|}{\|e_k\|} \cdot \frac{1}{\|e_k\|} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{Ho usato che} \\
 &\quad \text{siamo} \\
 &\quad \text{in dim.} \\
 &\quad \text{finita} \\
 &\leq C \sum_{k=1}^m |c_k| \\
 &\leq \underbrace{C\sqrt{m}}_A \left(\sum_{k=1}^m c_k^2 \right)^{1/2} \\
 &= A \|x\|
 \end{aligned}$$

$\leq \text{costante } C$

Step 2 La funzione $x \rightarrow \|x\|$ è continua rispetto alla $\|x\|$.
Dimostro pure la Lip:

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq A \|x - y\|$$

$\uparrow$ triangolare $\uparrow$ Step 1

Step 3 La funzione $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|}$ è continua rispetto alla $\|x\|$ quindi assume max/min sulla sfera della $\|\cdot\|$.
Il min è > 0 perché è il valore assunto per un certo x .

— 0 — 0 —

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI 3 facce

- ① Compattezza per successioni Uno sp. metrico (X, d) è compatto per succ. se ogni succ. ammette una s.succ. convergente: per ogni $\{x_n\} \subseteq X$ esiste $n_k \rightarrow +\infty$ str. cresc. e $x_\infty \in X$ t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

- ② Compattezza per ricoprimenti (X, d) è cpt. per ric. se ogni ricoprimento aperto ammette s. ric. finito.

Def. Uno sp. metrico (X, d) si dice

- LIMITATO se $\sup \{ d(x, y) : (x, y) \in X^2 \} < +\infty$
 $\text{diam}(X)$

o in modo equiv.: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $d(x, y) \leq M$ per ogni $(x, y) \in X^2$

- TOTALMENTE LIMITATO se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una ε -rete, cioè un sottoinsieme finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ tale che

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

↑
palle con centro x_i
e raggio ε

(gli x_i sono dei distributori e ognuno ha un distributore a distanza $\leq \varepsilon$ da casa)

Relazione ovvia (ma non troppo):

Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato

Il viceversa è falso: la distanza discreta su un insieme infinito ($\text{diam} = 1$, ma non esiste ε rete con $\varepsilon < 1$).

ANALISI 2 - LEZIONE 074

Titolo nota

26/02/2016

Notazione: (X, d) spazio metrico.Dati $x_0 \in X$ e $r > 0$ poniamo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

$$\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

Esercizio È possibile che una palla sia contenuta strettamente in una palla di raggio inferiore?**TEOREMA** (Caratterizz. della compattezza in sp. metrici)Sia (X, d) metrico.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

- (i) (X, d) è compatto per ricoprimenti,
- (ii) " " " " successioni,
- (iii) (X, d) è completo + totalmente limitato.

Schema della dimostrazione:

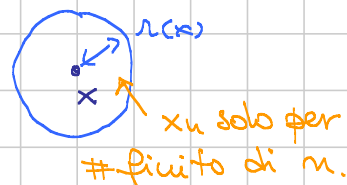
- (i) $\Rightarrow$ (ii) M
- (ii) $\Rightarrow$ completezza F
- (ii) $\Rightarrow$ tot. lim. M
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) MD
- (iii) + (ii) $\Rightarrow$ (i) D

(i) $\Rightarrow$ (ii) Hp: cpt. per ricopr. Tesi: comp. per succ.Lemma Sia (X, d) cpt. per ricopr. e sia $\{x_n\} \subseteq X$ una succ.
Allora $\exists x_\infty \in X$ con questa proprietà $\forall r > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_r(x_\infty)\}$ è infinito

Dtm. Supponiamo che sia falso. Allora

$\forall x \in X \exists r(x) > 0$ t.c. $B_{r(x)}(x)$ contiene termini della succ. solo per un numero finito di indici

Ora $\{B_{r(x)}(x) : x \in X\}$ sono un ricoprimento aperto di X . Quindi esiste un s.ric. finito



$$X = B_{r_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_k}(x_k)$$

In ognuna di queste cascano gli x_n solo per un numero finito di indici $n \in \mathbb{N}$. Assurdo.

Nota: i termini della succ. possono essere un numero finito (ad es. la succ. costante), ma gli indici sono comunque infiniti. $\square$

Dato il lemma si chiude trovando una s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Definisco

• n_1 t.c. $x_{n_1} \in B_1(x_\infty)$

•

• n_{k+1} t.c. $\underbrace{n_{k+1} > n_k}_{\text{indice} > \text{preced.}}$ e $x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x_\infty)$

posso perché la B contiene x_n per ∞ valori di n .

Questo garantisce che $d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{1}{k}$, quindi $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ completezza

Sia $\{x_n\}$ una succ. di Cauchy. Per Hp ammette una sottosucc. conv. Ora uso

Fatto generale: se una succ. di Cauchy ammette una s.succ. convergente, allora TUTTA QUANTA converge (stessa dim di analisi 1: esercizio)

(ii) $\Rightarrow$ totale limitatezza

Per assurdo supponiamo (X, d) NON TOT. LIM. e troviamo una succ. x_n che non ammette s. succ. convergenti.

(X, d) non tot. lim. vuol dire

$\exists r_0 > 0$ tale che comunque prendo un numero finito di palle di raggio r_0 , queste non ricoprono tutto X .

Costruisco x_n per inclusione così:

- scelgo x_1 a caso
- dati $x_1, \dots, x_k$ considero

$$x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{r_0}(x_i)$$

$\uparrow$ esiste per l'ipotesi di assurdo



Allora per costruzione $d(x_n, x_m) \geq r_0$ per ogni $m \neq n$.

Questo impedisce alla succ. $\{x_n\}$ di avere una s. succ. conv., (una sotto succ. conv. dovrebbe essere di Cauchy, ma non può perché la dist. fra 2 termini diversi è sempre $\geq r_0$).

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Lemma (Procedimento diagonale) Consideriamo

$$\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

una succ. di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, tutti INFINITI e ognuno contenuto nel precedente. Allora esiste una succ. n_k strett. cresc. tale che $n_k \in N_k$.

Dcm. Costruisco n_k induttivamente:

- prendo $n_0 \in N_0$ a caso
- scelti $n_1, \dots, n_k$, voglio scegliere $n_{k+1} \in N_{k+1}$ con $n_{k+1} > n_k$ e ho infinite scelte possibili.

Oss. In realtà $n_k \in N_i$ per ogni $i \leq k$.

Volendo: fissato i , abbiamo che

$n_k \in N_i$ definitivamente (per ogni $k \geq i$)

Lemma Sia (X, d) totalmente limitato e sia $\{x_n\}$ una successione.

Allora $\{x_n\}$ ammette una s.succ. di Cauchy.

Dcm. Voglio usare il procedimento diagonale. Definisco gli N_k induttivamente.

- $N_0 = \mathbb{N}$
- N_1 lo def. così: fisso $r=1$, ottengo una 1-rete

$$X = B_1(y_1) \cup \dots \cup B_1(y_m)$$

Almeno una delle $B_1(y_i)$ contiene termini della succ. per ∞ indici. Questi indici sono n_1 .

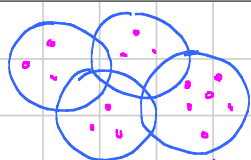
- ∴
- Definiti $N_1, \dots, N_k$ definisco N_{k+1} così: fisso $r = \frac{1}{k+1}$ e prendo una $\frac{1}{k+1}$ -rete

$$X = B_{\frac{1}{k+1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\frac{1}{k+1}}(y_m)$$

↙ m e gli y_i sono diversi da prima

Almeno una di queste contiene termini della succ. per infiniti indici di N_k : questi sono N_{k+1}

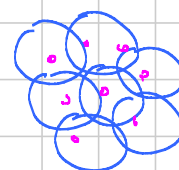
$$r=1$$



qui
infiniti
 N_1

Butto quelli
che non sono
in N_1

$$r=\frac{1}{2}$$



Concludo con il procedimento diagonale: prendo n_k crescente
strett. tale che $n_k \in N_k$.

Dico che $\{x_{n_k}\}$ è di Cauchy

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo k_0 t.c. $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$.
Allora definitivamente

$n_k \in N_{k_0}$ (questo accade $\forall k \geq k_0$),

Ma allora per ogni $i \geq k_0$, $j \geq k_0$ si avrà

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq 2 \frac{1}{k_0} < \varepsilon$$

↑
perché x_{n_i} e x_{n_j} è in una stessa palla
di raggio $\frac{1}{k_0}$.



Conclusione di (iii) $\Rightarrow$ (ii)

Grazie alla totale lim. ottengo una s. succ. di Cauchy e
grazie alla completezza questa converge.

ANALISI 2 — LEZIONE 075

Titolo nota

26/02/2016

Cont. teo. caratt. compattezza : resta da fare $\boxed{(ii) + (iii) \Rightarrow (i)}$

Lemma (Lemma del raggio magico) (Lemma del numero di Lebesgue)

Sia (X, d) uno sp. metrico compatto per successioni.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

Allora esiste $r > 0$ con questa proprietà
 $\uparrow$
 numero di L. del ricopr.

$$\forall x \in X \quad \exists i \in I \quad \text{t.c.} \quad B_r(x) \subseteq U_i.$$

Dim. Supponiamo per assurdo che non sia vero, quindi

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \quad \text{t.c.} \quad B_r(x) \text{ non \u00e9 contenuta in nessun } U_i$$

Uso questa con $r = \frac{1}{n}$ e ottengo x_n t.c. $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ non \u00e9 contenuta in nessun U_i .

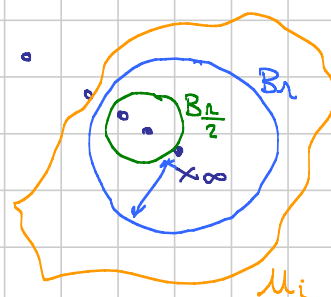
Per ipotesi esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Sia $i \in I$ tale che

$$x_\infty \in U_i$$

Essendo U_i aperto, esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x_\infty) \subseteq U_i$$



Scelgo k abbastanza grande in maniera tale che

$$x_{n_k} \in B_{\frac{r}{2}}(x_\infty)$$

$$\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$$

(entrambe sono vere definitivamente)

Questo garantisce che

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_r(x_\infty) \subseteq M_i$$

e questo contraddice la definizione di x_{n_k} (era un pto tale che la palla con centro in lui e raggio $\frac{1}{n_k}$ non era contenuta in nessun M_i).

— o — o —

Ho usato il seguente fatto generale:

dati $x \in X$, $r > 0$, $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, allora

$$B_{\frac{r}{2}}(y) \subseteq B_r(x)$$

$$\begin{aligned} z \in B_{\frac{r}{2}}(y) &\Rightarrow d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in B_r(x).$$

— o — o —



Concludiamo che (i) + (ii) $\Rightarrow$ (i)

Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ un ricopr. qualunque. Voglio trovare un s. ricopr. finito.

Sia $r > 0$ il raggio magico del ric. (esiste per hp (ii))

Per la totale limitatezza esiste una r -rete, cioè esistono $y_1, \dots, y_m$ t.c.

$$X = B_r(y_1) \cup \dots \cup B_r(y_m)$$

Per la magicità del raggio esistono $i_1, \dots, i_m$ in I t.c.

$$B_r(y_1) \subseteq M_{i_1}, \dots, B_r(y_m) \subseteq M_{i_m}$$

Ma allora

$$X = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_m} \leftarrow \text{s. ric. finito.}$$

— o — o —

Teorema (Heine - Cantor)

Siano (X, d_x) e (Y, d_Y) due sp. metrici, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) (X, d_x) è compatto.

Allora f è unif. continua.

Dim 1 $\rightarrow$ via compattezza per succ. Dico dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall y \in B_\delta(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Suppongo per assurdo che sia falso, quindi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X \exists y \in B_\delta(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ e ottengo x_n e y_n t.c.

$$d_X(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Come ad analisi 1

- esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ (perché (X, d_x) è cpt. per succ.)
- per forza $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$

$$0 \leq d_X(y_{n_k}, x_\infty) \leq \underbrace{d_X(y_{n_k}, x_{n_k})}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d_X(x_{n_k}, x_\infty)}_{\rightarrow 0}$$

- poiché f è continua per succ. avremo $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$
 $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$

e quindi

$$\varepsilon_0 \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \rightarrow d_Y(f(x_\infty), f(x_\infty)) = 0$$

Assurdo. $\square$

Dim 2 $\rightarrow$ via compatt. per ricopr.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per continuità ε - δ avremo che

$$\forall x \in X \quad \exists \delta(x) > 0 \quad \forall y \in B_{\delta(x)}(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Ora $\{B_{\delta(x)}(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento di X , dal quale posso estrarre un s. ric. finito.

$$X = B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_m}(x_m)$$

Non ho finito: le cose vanno bene solo se x è il centro e y sta nella stessa palla.
(x e y abbastanza vicini possono finire però in palle diverse)

Via d'usata: parto con $\frac{\varepsilon}{2}$, ottengo un ricoprimento opportuno, il ricopr. avrà un raggio massimo che chiamo δ e questo va bene per l'unif. continuità. Infatti:

siano x e y in X con $d_X(x, y) \leq \delta$. Allora $y \in B_{\delta}(x)$ che è contenuta in una certa

$$B_{\delta(x_i)}(x_i)$$

Ora

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(y), f(x_i)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

— o — o —

Prop. (Caratterizzazione della totale limitatezza)

Sia (X, d) metrico.

Allora sono fatti equivalenti:

(i) X è totalmente limitato

(ii) $\forall r > 0 \quad \exists K_r \subseteq X$ totalmente limitato con questa propr.

$$\forall x \in X \quad \exists y \in K_r \quad \text{t.c.} \quad d(x, y) \leq r.$$

(i) K_r sono ∞ distributori, un tot. limitati

Dim (i) $\Rightarrow$ (ii) è banale addirittura con K_r finito.



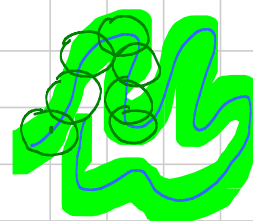
(ii) $\Rightarrow$ (i) Fisso $r > 0$ e voglio trovare # finito di distributori.

Uso la (ii) con $\frac{r}{2}$ e trovo $K_{\frac{r}{2}}$ tale che

l'intorno di $K_{\frac{r}{2}}$ a raggio $\frac{r}{2}$ è tutto X .

Considero $x_1, \dots, x_m$ tale che

$$K_{\frac{r}{2}} \subseteq B_{\frac{r}{2}}(x_1) \cup \dots \cup B_{\frac{r}{2}}(x_m)$$



Dico che $X \subseteq B_r(x_1) \cup \dots \cup B_r(x_m)$

Dato infatti un qualunque $x \in X$ esiste $y \in K_{\frac{r}{2}}$ t.c.

$d(x, y) \leq \frac{r}{2}$. Esiste poi $i \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $d(y, x_i) \leq \frac{r}{2}$

e concludo con la triangolare che $d(x, x_i) \leq r$.



Osservazione finale

- Le funzioni continue mandano compatti in compatti, anche se lo spazio è solo metrico.

Questo si dim. bene sia per succ. sia per ricop.

- Le funzioni continue non mandano completi in completi, né tot. lim. in tot. lim.

Solo insieme si conservano completezza e tot. lim.

(Trovare esempi: esercizio!)

— • — • —

ANALISI 2 — LEZIONE 076

Titolo nota

01/03/2016

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico.

Si dice **CONTRAZIONE** una qualunque funzione $\varphi: X \rightarrow X$ che è Lip. con costante di Lip. < 1 , cioè tale che esiste $L < 1$ t.c.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2$$

TEOREMA (Delle contrazioni - Teo. di p.to fisso di Banach)

Sia (X, d) metrico **COMPLETO**, e sia $\varphi: X \rightarrow X$ contrazione.

Allora φ ammette un unico **p.to fisso**, cioè esiste un unico $x \in X$ tale che

$$\varphi(x) = x.$$

Dim. **Unicità** Supponiamo che ci siano due p.ti fissi

$$\varphi(x) = x \quad \varphi(y) = y$$

Allora

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d(x, y)$$

$\uparrow$ x, y fissi $\uparrow$ contras.

$$\underbrace{(1-L)}_{>0} d(x, y) \leq 0$$

$\downarrow$ per forza $= 0$.

Nota: non ho usato la completezza.

Esistenza Idea euristica: prendo $x_0 \in X$ a caso. Poi costruisco la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Facciamo finta che $x_n \rightarrow x_\infty$

$$\begin{array}{ccc}
 x_{n+1} & = & \varphi(x_n) \\
 \downarrow & & \downarrow \leftarrow \varphi \text{ è cont. essendo Lip} \\
 x_\infty & = & \varphi(x_\infty)
 \end{array}$$

Quindi, [SE] la succ. $\{x_n\}$ converge, allora il suo limite è il pto fisso cercato.

Per dim. la convergenza, basta far vedere che è di Cauchy.

Stima preliminare: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$$d(x_2, x_1) = d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \leq L d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) \leq L^2 d(x_1, x_0)$$

$\vdots$

Induzione $d(x_{k+1}, x_k) \leq L^k d(x_1, x_0)$

Prendiamo 2 indici $m \geq n$. Allora

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq L^{m-1} d(x_1, x_0) + \dots + L^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$= (L^{m-1} + \dots + L^n) d(x_1, x_0)$$

$$\leq L^n (1 + L + L^2 + \dots) \quad \text{metto gli } \infty \text{ termini della geometria}$$

$$\leq L^n \frac{1}{1-L} d(x_1, x_0)$$

Questo dimostra che x_n è di Cauchy: infatti per ogni $\varepsilon > 0$ scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$L^{m_0} \frac{1}{1-L} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon \quad (\text{posso perché } L < 1)$$

e sono sicuro che $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ per ogni $m \geq m_0, n \geq m_0$.

— o — o —

Idea: quando ho una contrazione, posso partire da un pto qualunque e iterando convergo all'unico pto fisso.
Tra l'altro

$$d(x_{n+1}, x_\infty) \leq L d(x_n, x_\infty)$$

$$d(x_n, x_\infty) \leq L^n d(x_0, x_\infty)$$

Interpretazione geografica: se metto una mappa d'Italia sul tavolo, allora c'è un unico pto della mappa che rappresenta se stesso.

Controesempi

① Serve la completezza: $X = (0,1)$ con la d classica
 $\varphi(x) = \frac{x}{28}$ *contrae con $L = \frac{1}{28}$*
 e non ha pti fissi.

② Non basta $L=1$: $X = \mathbb{R}$ $\varphi(x) = x + 28$

③ Non basta $L=1$ nemmeno se X è compatto

$$X = S^1, \quad \varphi = \text{rotazione di } 28^\circ$$

④ Non basta la "contrazione debole":

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x, y) \quad \forall x \neq y$$

(Basta per l'unicità, ma non per l'esistenza)

$$X = \mathbb{R} \quad \varphi(x) = x - \arctan x + 28$$

Si verifica che $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi φ è contrazione debole.

Ma φ non ha pti fissi.

⑤ (Hard, ma non troppo) X compatto
 φ contrazione debole
 $\Rightarrow$ esiste pto fisso

Oss. $\text{Cpt.} + \text{contraz. debole} \not\Rightarrow \text{contrazione vera}$
 — o — o —

COMPLETAMENTO DI UNO SPAZIO METRICO

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico.

Si dice **COMPLETAMENTO** di (X, d) una terna $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ dove

(i) $(\hat{X}, \hat{d})$ è uno spazio metrico completo

(ii) $i: X \rightarrow \hat{X}$ è una isometria, cioè

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X$$

(iii) $i(X)$ è denso in $\hat{X}$.

Esempio $X = (0, 1)$ $\hat{X} = [0, 1]$ (se non ci fosse la (iii) avrebbe bene $\hat{X} = \mathbb{R}$)

Teorema 1 Ogni sp. metrico (X, d) ammette un completamento.

Teorema 2 (Teorema di estensione)

Sia (X, d) un metrico, e sia $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ un suo completamento. Sia (Y, d_Y) uno spazio metrico **COMPLETO**, e sia

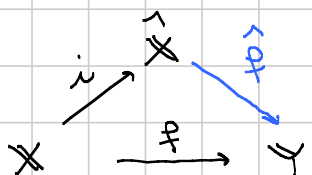
$$f: X \rightarrow Y$$

una funzione unif. continua.

Allora esiste un'unica estensione $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$ unif. cont. tale che

$$\hat{f}(i(x)) = f(x) \quad \forall x \in X$$

e cioè che chiude il diagramma



Teorema 3 (Unicità del completamento)

Sia (X, d) un metrico, e siano $(\hat{X}_1, \hat{d}_1, i_1)$ e $(\hat{X}_2, \hat{d}_2, i_2)$ due completamenti.

Allora esiste

$$\varphi: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$$

tale che

(i) φ è bigettiva

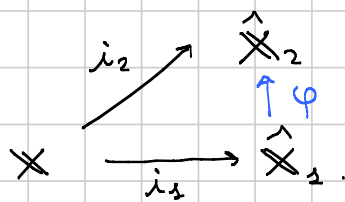
(ii) φ è isometria, cioè $d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$

per ogni $(x, y) \in \hat{X}_1^2$

(iii) φ commuta con le immersioni, cioè

$$i_2(x) = \varphi(i_1(x)) \quad \forall x \in X,$$

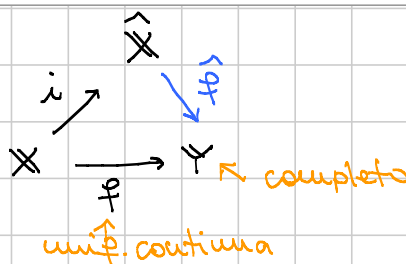
cioè chiude i diagrammi



ANALISI 2 - LEZIONE 077

Titolo nota

01/03/2016

Teorema di estensione

"Stessa dimostrazione di analisi 1" (dato $A \subseteq \mathbb{R}$ il suo completamento è $\text{Clos}(A)$)

Lemma Sia $f: X \rightarrow Y$ unif. cont.

Allora f manda succ. di Cauchy in X in succ. di Cauchy in Y

Dim. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ di Cauchy rispetto a d_X
 Dico che $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ è di Cauchy rispetto a d_Y .

Dato $\varepsilon > 0$, prendo $\delta > 0$ come nella unif. cont.

Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ in modo tale che $d_X(x_n, x_m) \leq \delta$ per ogni $n \geq m_0, m \geq m_0$ e ottengo che

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0$$

Dim. estensione Devo definire $\hat{f}(\hat{x})$ per ogni $\hat{x} \in \hat{X}$.
 So che $i(X)$ è densa in $\hat{X}$, quindi esiste

$$i(X) \ni \hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}$$

In particolare $\hat{x}_n = i(x_n)$ con $x_n \in X$.

La succ. $\hat{x}_n$ è di Cauchy in $\hat{X}$ (converge), quindi x_n è di Cauchy in X (i è isometria), quindi $f(x_n)$ è di Cauchy in Y (f è unif. cont.), quindi $f(x_n) \rightarrow y \in Y$

(perché $\mathcal{Y}$ è completo). Devo allora $\hat{f}(\hat{x}) = y$.

Resta solo da verificare che la definizione è ben posta, cioè se prendo un'altra succ.

$$i(\hat{x}) \ni \hat{z}_n \longrightarrow \hat{x}$$

"
 $i(z_n)$

allora $f(z_n) \rightarrow y$ (stesso di prima). Infatti supponiamo

$$f(z_n) \rightarrow y_1$$

Allora

$$d_Y(y, y_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_Y(f(z_n), f(x_n)) = 0$$

devo dim.

Basta verificare che $d_Y(f(z_n), f(x_n)) \leq \varepsilon$ per n grande. Ma questo vale quando

$d_X(z_n, x_n) \leq \delta$ per unif. cont., e questo vale quando $d_{\hat{X}}(\hat{z}_n, \hat{x}_n) \leq \delta$ per isometria e questo per n grande è vero perché

$$\begin{array}{l} \hat{x}_n \rightarrow \hat{x} \\ \hat{z}_n \rightarrow \hat{x} \end{array}$$

La dimostrazione che $\hat{f}$ è unif. cont. è la stessa di analisi 1.

— o — o —

Teorema di esistenza del completamento Dato (X, d)

Devo costruire $\hat{X}, \hat{d}, i: X \rightarrow \hat{X}$ isometria con immagine densa

Step 1 Costruisco $\widehat{X}, \widehat{d}$.

$$\widehat{X} = \{ \text{successioni di Cauchy in } X \}$$

Dato due succ. di Cauchy $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, definisco

$$\widehat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n)$$

Cosa dovrei verificare

① $\widehat{X} \neq \emptyset$ se $X \neq \emptyset$ (le succ. costanti vanno bene)

② $\widehat{d}$ è ben definita (mi serve che la succ. $d(x_n, y_n)$ sia di Cauchy come succ. di reali)

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, x_m)| + |d(x_n, x_m) - d(y_m, x_m)|$$

... non mi viene ...

$$\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)|$$

$\leq d(y_n, y_m)$
 $\leq \varepsilon$

$\leq d(x_n, x_m)$
 $\leq \varepsilon$

} Aggiunto dopo video

③ $\widehat{d}$ è quasi una distanza, cioè verifica tutte le proprietà tranne la (d2), cioè può essere 0 anche se le succ. sono diverse.

Step 2 Definizione di $\widehat{X}, \widehat{d}, i$

Introduco una relazione di equiv. in $\widehat{X}$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{se} \quad d(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

Ci sarebbero un po' di cose da verificare

① $\sim$ è una relaz. di equiv. (semplice)

Posso definire

$$\hat{X} := \hat{X} / \sim \quad (\text{spazio quoziente})$$

② $\hat{d}$ passa al quoziente, cioè

$$\left. \begin{array}{l} \{x_n\} \sim \{x'_n\} \\ \{y_n\} \sim \{y'_n\} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \hat{d}(\{x'_n\}, \{y'_n\})$$

Fatto questo, abbiamo definito $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$

③ $\hat{d}$ è una distanza vera in $\hat{X}$ (il quoziente mi regola la (d2))

④ Definisco $i : X \rightarrow \hat{X}$ identificando ogni $x \in X$ con la classe di equivalenza della succ. $x_n \equiv x$

⑤ i è una isometria (ora è banale)

⑥ $i(X)$ è denso in $\hat{X}$, rispetto alla distanza $\hat{d}$.

(Si tratta solo di capire cosa fare e trovare una notazione per farlo...)

Dato $\hat{x} \in \hat{X}$, dato $\varepsilon > 0$, voglio $y \in X$ tale che

$$\hat{d}(\hat{x}, i(y)) \leq \varepsilon$$

Ora $\hat{x} = [\{x_n\}]$ e l' y che cerco sarà x_n con n abbastanza grande.

Step 3 Resta da far vedere che $(\hat{X}, \hat{d})$ è completo.

Sia $\{\hat{x}_n\}$ una succ. di Cauchy in $\hat{X}$ rispetto a $\hat{d}$.
Voglio individuare $\hat{x}_\infty \in \hat{X}$ tale che

$$\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}_\infty \quad \text{in } \hat{X}.$$

Come definisco $\hat{x}_\infty$? Uso la densità verificata prima.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in X$ tale che

$$\hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) \leq \frac{1}{n}$$

↑ posso mettere un qualunque $\varepsilon > 0$

Si tratta ora di verificare che

$$\begin{array}{cccc} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 & \hat{x}_4 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet y_1 & \bullet y_2 & \bullet y_3 & \bullet y_4 \end{array}$$

① $\{y_n\}$ è succ. di Cauchy in X

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= \hat{d}(i(y_n), i(y_m)) \\ &= \hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, i(y_m)) \\ &\leq \frac{1}{n} \quad \leq \varepsilon \quad \leq \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Posso definire $\hat{x}_\infty = [\{y_n\}]_\sim$

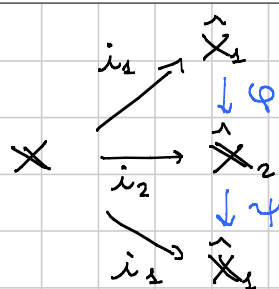
② $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}_\infty$ in $\hat{X}$. Questo segue dal fatto che

$i(y_n) \rightarrow \hat{x}_\infty$ (questa andrebbe verificata)

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_\infty) \leq \underbrace{\hat{d}(\hat{x}_n, i(y_n))}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\hat{d}(i(y_n), \hat{x}_\infty)}_{\text{piccola per } n \text{ grande}}$$

— o — o —

Unità



φ si costruisce con il teorema di estensione

ψ si costruisce con il teorema di estensione

Dovrei verificare:

- ① $\psi \circ \varphi$ è l'identità (lo è su un denso)
- ② il diagramma si chiude per costruzione
- ③ φ è isometria (lo è su un denso).

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 078

Titolo nota

02/03/2016

VARIETÀ → Teo. funzioni implicite
 → Teo. funzioni inverse
 → Moltiplicatori di Lagrange

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ descritti come luogo di zeri di funzioni o sistemi. Caso generale: date k funzioni $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cerco di studiare l'insieme

↑
o sottoinsieme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n: f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\} \quad (k \leq n)$$

k = codimensione = numero di equazioni

- Tre casi:
- ① $n = 2, k = 1$
 - ② n generico, $k = 1$
 - ③ $k < n$ generico

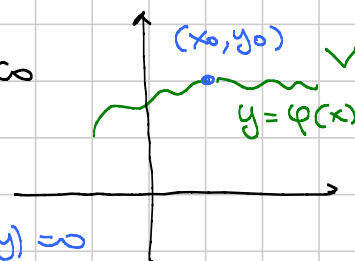
Idea: nel caso ① abbiamo un'equazione $f(x, y) = 0$,
 abbiamo un p.to (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) = 0$

Mi piacerebbe che vicino a (x_0, y_0)

il luogo V fosse descritto da un grafico

$$y = \varphi(x)$$

↑
funzione definita
implicitamente dall'eq. $f(x, y) = 0$
vicino a (x_0, y_0)



Brutalmente: ho ricavato y dall'equazione $f(x, y) = 0$
 Ovviamente deve valere

$$f(x, \varphi(x)) = 0. \quad (\text{ci accorgiamo anche se } x = \varphi(y))$$

Teorema (Imp. F.T. $m=2, k=1$) (A Pisa teorema del DINI)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ t.c. $f(x_0, y_0) = 0$.

Supponiamo che f sia continua in Ω *← dopo video*

$f_y(x, y)$ esiste in Ω ed è sempre $\neq 0$

Allora esiste $\varepsilon > 0, \delta > 0$ ed esiste

$$\varphi: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$$

tale che

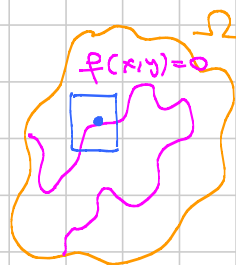
$$\begin{aligned} \{ (x, y) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] : f(x, y) = 0 \} = \\ = \{ (x, \varphi(x)) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \} \end{aligned}$$

Inoltre φ è continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Corollario Supponiamo che f sia di classe C^1 in Ω e $\nabla f \neq 0$ ovunque.

Allora per ogni punto $(x_0, y_0) \in V$ esiste un rettangolo in cui V è del tipo

$$y = \varphi(x) \text{ oppure } x = \varphi(y)$$



[Dim.] In ogni punto di V avremo $f_y(x, y) \neq 0$ (e allora applico il teorema) oppure $f_x(x, y) \neq 0$ (e allora applico il teo. a variabili invertite).

Teorema Nelle ipotesi del teorema principale, se f è di classe C^k , allora anche φ è di classe C^k .

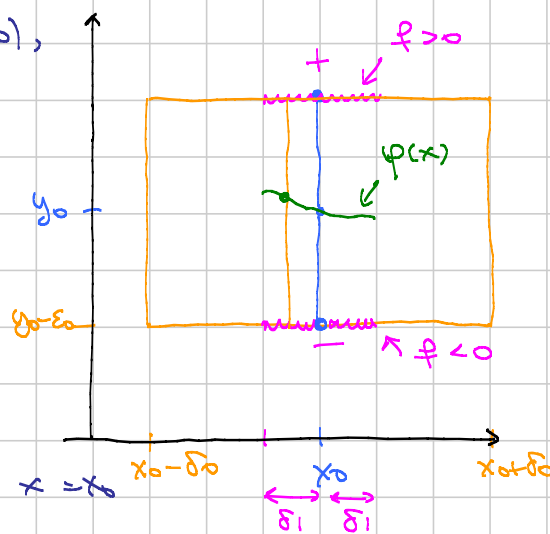
Dim. Impl. F.T. Ipotesi $f(x_0, y_0) = 0$

$f_y(x, y) \neq 0$ in un intorno di (x_0, y_0) ,
diciamo della forma

$$[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

Supponiamo che $f_y(x, y) > 0$
nell' intorno (e è < 0 la
dim. è analoga)

Considerando la restrizione alla retta $x = x_0$
otteniamo che



$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0$$

$$f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

Considero le restrizioni alla retta $y = y_0 - \varepsilon_0$ e $y = y_0 + \varepsilon_0$.
Per continuità

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \begin{aligned} f(x, y_0 - \varepsilon_0) &< 0 & \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \\ f(x, y_0 + \varepsilon_0) &> 0 & \end{aligned}$$

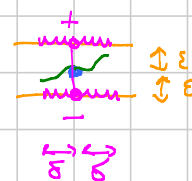
Ora considero tutte le rette verticali $x = \text{cost} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$.
Su queste rette f passa da $-$ a $+$ ed è monotona strett.
perché $f_y > 0 \Rightarrow f$ si annulla un' unica volta in ogni
segmento verticale.

Questo dimostra che il luogo γ , ristretto al rettangolo
 $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$ è il grafico di φ .

Ma serve la continuità

Intanto basta dire la continuità di φ
in x_0 .

1° modo $(\varepsilon - \delta)$ Fisso ε in verticale e ripeto la
dim. nel rettangolino più basso



2° modo Per successioni con lemma della sotto-sotto.

Sia $x_n \rightarrow x_0$. Voglio dim. che $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0) = y_0$

A meno di sotto succ. $\varphi(x_n) \rightarrow y_\infty$ (non rinuncio).

Se dimostro che $y_\infty = y_0$ per forza, allora ho finito.

D'altra parte

$$0 = f(x_n, \varphi(x_n)) \rightarrow f(x_0, y_\infty)$$

$\uparrow$
def.

$\uparrow$
cont. di f

$\uparrow$
l'unico pto sopra x_0 che annulla f è y_0 .

Oss. Nel primo modo usiamo solo la continuità di $f(x, y)$ sulle rette // agli assi.

Regolarità Supponiamo che $f(x, y)$ sia C^1 in Ω . Voglio dim. che φ è C^1 e vale la formula

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

Non dimostrazione: $0 = f(x, \varphi(x))$ e derivo

$$0 = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \rightarrow \text{ricavo } \varphi'(x)$$

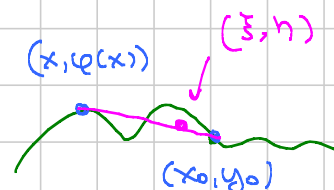
$\uparrow$
chain rule

Dim $0 = f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f_x(\xi, \eta) + (\varphi(x) - y_0) f_y(\xi, \eta)$

Ricavo:

$$\frac{\varphi(x) - y_0}{x - x_0} = - \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}$$

$$\varphi'(x_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$



Si arriva a C^k per BOOTSTRAP

ANALISI 2

-

LEZIONE 079

Titolo nota

02/03/2016

Oss. Cosa succede nel Dini $m=2$ e $k=1$ se non sono soddisfatte le ipotesi, in particolare se $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Tante possibilità

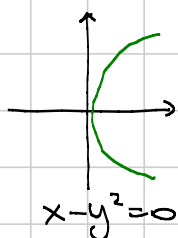
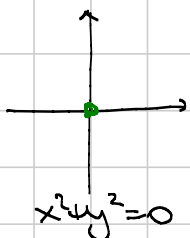
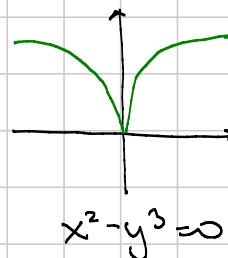
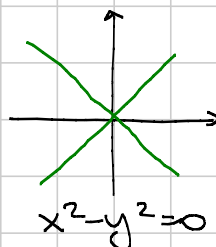


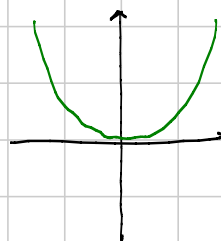
grafico dell'altra
parte



p.to solo ☹️



Più anche non succedere
nulla



Caso m generico, $k=1$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua su Ω

$f_{x_n}(x, y) \neq 0$ in un intorno di (x_0, y_0) dove $f(x_0, y_0) = 0$

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_{n-1})}_x, \underbrace{(x_n)}_y = (x, y)$$

Allora esistono $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi: \bar{B}(x_0, \delta) \rightarrow [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ continua tale che

$$\forall n [\bar{B}(x_0, \delta) \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]] = \text{grafico di } \varphi$$

Se f è C^k , allora φ è C^k e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

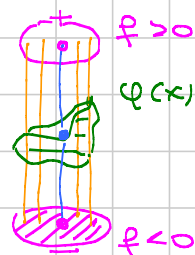
$i = 1, \dots, m-1$

prime $m-1$ variabili

Dom. Stessa del caso precedente

Continuità e regolarità
come prima.

f passa da $c < 0$ a $a > 0 \rightarrow$
ed è monotona
 $\Rightarrow$ si annulla almeno
una volta, anzi
una sola
quello è $\varphi(x)$



— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = \arctan y + xy^3 + \sin x$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Dimostrare che definisce una funzione

$$y = \varphi(x)$$

vicino all'origine, e calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 4

Step 1 $f(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 1$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Quindi localmente $\forall$ è il grafico di $\varphi(x)$

Step 2 $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$

$$\varphi'(0) = -\frac{f_x(0, 0)}{f_y(0, 0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

Calcoliamo $\varphi''(0)$

$$\varphi''(x) = -\frac{[f_{xx}(x) + f_{xy}(x)\varphi'(x)]f_y(x) - f_x(x)[f_{yx}(x) + f_{yy}(x)\varphi'(x)]}{[f_y(x, \varphi(x))]^2}$$

Tutte le derivate si calcolano e facilmente.

$\frac{-1}{1} \uparrow$
sono 0 le deriv.
secondo di f

Step 3 φ è C^4 , quindi il Taylor di ordine 4 esiste

$$\varphi(x) = -x + \underset{0}{ax^2} + bx^3 + cx^4 + o(x^4)$$

So che deve essere $f(x, \varphi(x)) = 0$, quindi

$$\arctan \varphi(x) + x \varphi^3(x) + \sin x = 0$$

$$\arctan(-x + ax^2 + bx^3 + cx^4) + x \left(\quad \right)^3 + x - \frac{1}{6}x^3 = O(x^4)$$

$$\cancel{-x} + ax^2 + bx^3 + cx^4 - \frac{1}{3}(-x^3 + 3ax^4) - x^4 + \cancel{-\frac{1}{6}x^3} = O(x^4)$$

$\uparrow$
 $=0$

$\leadsto$ trovo c ed

Domanda globale: è vero che per ogni $x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$ t.c.
 $f(x, y) = 0$.

Domanda più semplice: V è limitato?

NO Per ogni $x > 0$ sappiamo che $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y) = -\infty$$

Si dimostra che $\forall x > 0 \exists! y \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x, y) = 0$

— 0 — 0 —

Meta-strategie.

① Come dimostro che V è regolare ovunque?

Spero che il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

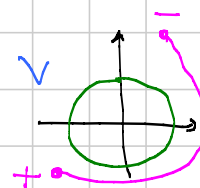
non abbia soluzioni.



② Come decido se V è limitato oppure no?

$\rightarrow$ se so che $\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) > 0$, allora V è limitato
(o $\limsup < +\infty$)

$\rightarrow$ se so che $\liminf f < 0$ e $\limsup > 0$, allora V non è limitato



③ Come decido se V è connesso?

→ Difficile !!

È più facile vedere se non è connesso



Esempio 2 $\arctan(xz) + \sin z + \cos(yz) - 1 = 0$

Definisco una sup. vicino all'origine $z = \varphi(x, y)$ ($\varphi(0, 0, 0) = 1$)

→ V è limitato? NO ($x=y=0 \rightarrow \liminf$ e $\limsup$ sono ± 1)

φ è convessa / concava? Basta calcolare $H\varphi(0, 0)$.

Impongo $\varphi(x, y) = ax + by + cx^2 + 2dxy + ey^2$
e sostituisco di ordine 2

$$\arctan(x(ax+by)) + \sin(ax+by + cx^2 + 2dxy + ey^2) + 1 - 1 = 0$$

partiamo
da

$$\rightarrow a = b = 0$$

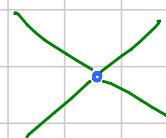
→ $c = d = e = 0 \rightarrow H\varphi(0, 0)$ è nullo, quindi non possiamo dire nulla.

È chiaro che non è limitato, ma non sappiamo se è connesso o se $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x, y, z) = 0$.

— o — o —

Esercizio $f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

$Hf(x_0, y_0)$ ha $\text{Det} < 0 \Rightarrow$ localmente è così



ANALISI 2 - LEZIONE 080

Titolo nota

04/03/2016

Nuova dimostrazione del te. funzioni implicite con $m=2$ e $k=1$.

Notazioni e ipotesi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \Omega$

Supponiamo

- $f(x_0, y_0) = 0$
- $f_y(x, y)$ esiste ed è continua in Ω
- $f(x, y)$ continua in Ω
- $f_y(x_0, y_0) > 0$

Allora esistono $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ e $\varphi: \dots$ tali che $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Dim. Faccio 3 scelte

- Scelgo $m_0 > 0$ tale che

$$f_y(0, 0) \geq m_0 > 0$$

- Scelgo $\delta_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$|f_y(x, y) - f_y(0, 0)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x, y) \in [-\delta_0, +\delta_0] \times [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$$

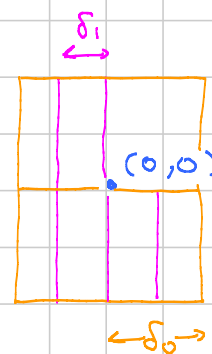
Questo è possibile per l'(unif) cont. di f_y

- Scelgo $\delta_1 > 0$ tale che

$$|f(x, 0)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} \quad \forall x \in [-\delta_1, +\delta_1]$$

Per ogni $x \in [-\delta_1, +\delta_1]$ voglio trovare $y \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$ t.c.

$$f(x, y) = 0.$$



Idea è di considerare la funzione

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro}}}{\Phi_{(x)}(y)} := y - \frac{f(x, y)}{f_y(0, 0)}$$

Supponiamo che $\Phi_{(x)}(y)$ abbia un p.to fisso $\bar{y}$. Allora $f(x, \bar{y}) = 0$ e quindi $\bar{y}$ è quello che volevo.

Per dimostrare che ha un p.to fisso (unico) uso il teorema delle contrazioni nello spazio metrico $[-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$.

Devo fare 2 verifiche

($\Phi 1$) $\Phi_{(x)} : [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0] \rightarrow [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$, quindi manda lo spazio in sé.

($\Phi 2$) $\Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$ -lipschitz, dunque è una contrazione.

Per fare le verifiche riscrivo

$$\Phi_{(x)}(y) = \frac{f_y(0, 0)y - f(x, y)}{f_y(0, 0)} = g(x, y)$$

Proprietà di $g(x, y)$. È derivabile parzialmente rispetto ad y e

$$|g_y(x, y)| = |f_y(0, 0) - f_y(x, y)| \rightsquigarrow \text{piccolo se } (x, y) \text{ è vicino a } (0, 0)$$

Inoltre

$$|g(x, y)| \leq |g(x, 0)| + |g(x, y) - g(x, 0)|$$

$$= |f(x, 0)| + |y| \cdot |g_y(x, \eta)|$$

$\uparrow$
piccolo se
 $x \sim 0$

$\uparrow$
piccolo
se $|y|$ piccolo

$\uparrow$
piccolo se
 g_y è piccolo.

Scriviamo per bene le piccolezze:

$$|g_y(x, y)| = |f_y(0,0) - f_y(x, y)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \text{nel rettangolo}$$

$$|g(x, y)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} + \varepsilon_0 \frac{m_0}{2} = m_0 \varepsilon_0$$

Verifica di (ϕ_1) . Mi serve che $\phi_{C_n} \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$, cioè

$$|\phi_{C_n}(y)| \leq \varepsilon_0. \quad \text{Ma}$$

$$|\phi_{C_n}(y)| = \frac{|g(x, y)|}{|f_y(x_0, y_0)|} \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{m_0} = \varepsilon_0$$

Verifica di (ϕ_2) :

$$\begin{aligned} |\phi_{C_n}(y_2) - \phi_{C_n}(y_1)| &= \frac{|g(x, y_2) - g(x, y_1)|}{|f_y(0,0)|} \\ &= \frac{|y_2 - y_1| \cdot |g_y(x, y)|}{\underbrace{|f_y(0,0)|}_{\geq m_0}} \leq \frac{m_0}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

Esempio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il problema

$$n^2 \sin x + e^x - \arctan x + u x^2 = 1$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema ammette una soluzione x_n e vedere il limite di x_n .

$$\text{Divido per } u^2: \quad \sin x + \frac{1}{n^2} e^x - \frac{1}{n^2} \arctan x + \frac{1}{n} x^2 - \frac{1}{n^2} = 0$$

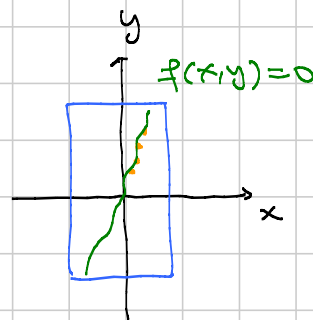
Pongo $y = \frac{1}{n}$: $\underbrace{\sin x + y^2 e^x - y^2 \arctan x + y x^2 - y^2}_{f(x,y)} = 0$

Così diventa un problema di funzioni implicite vicino a $(0,0)$
Voglio ricavare x in funzione di y . Basta verificare che

$$f_x(0,0) \neq 0 \quad \text{Ok perché} \quad f_x(0,0) = 1$$

$$x = \varphi(y) \quad \varphi'(y) = - \frac{f_y(\varphi(y), y)}{f_x(\varphi(y), y)}$$

$$\varphi'(0) = - \frac{0}{1} = 0$$



Quindi $\varphi(y) = o(y) \rightsquigarrow x_n = o(\frac{1}{n})$

Se volessi ordine di infinitesimo e parte principale dovrei sviluppare $\varphi(y)$ e trovare il 1° termine non nullo.

— 0 — 0 —

Idea euristica della dimostrazione con p to fisso.

Voglio che

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

o detto meglio $f(x, y) = 0$. Sviluppo:

$$f(x, y) = f(0,0) + y f_y(x,0) + r(x,y) \quad (=0)$$

Se fosse così $y = - \frac{r(x,y)}{f_y(x,0)}$

Ignorando che $f(x,y)$ posso sempre avere

$$r(x,y) = f(x,y) - y f_y(x,0)$$

e quindi $y = + \frac{y f_y(x,0) - f(x,y)}{f_y(x,0)} = \underbrace{y - \frac{f(x,y)}{f_y(x,0)}}_{\phi(y)}$

ANALISI 2

LEZIONE 081

Titolo nota

04/03/2016

Funzioni implicite in CODIMENSIONE k

$$1 \leq k < n$$

$$m := n - k$$

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. In componenti

$$f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0$$

$$f_2(\dots) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_k(\dots) = 0$$

k equazioni in n
incognite (x, y)
 m variabili $\uparrow$ k variabili $\uparrow$

Supponiamo che

- $f(0,0) = 0$
- $f(x,y)$ continua in Ω
- $J_y f(0,0)$ è invertibile (rank k)
- $J_y f(x,y)$ continua in $(0,0)$

$$J_f = \begin{array}{|c|c|} \hline m & k \\ \hline J_x f & J_y f \\ \hline \end{array} \quad k$$

Allora esistono $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi: B_\delta(0, \mathbb{R}^m) \rightarrow B_\varepsilon(0, \mathbb{R}^k)$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B_\delta(0, \mathbb{R}^m).$$

Inoltre

- ① φ è continua
- ② Se f è di classe C^1 , allora φ è di classe C^1 e

$$J\varphi(x) = -[J_y f(x, \varphi(x))]^{-1} [J_x f(x, \varphi(x))]$$

- ③ Se f è di classe C^k , allora φ è di classe C^k (bootstrap).

Emistrica per ② $f(x, \varphi(x)) = 0$ Calcolo le derivate

$$J_x f(x, \varphi(x)) + J_y f(x, \varphi(x)) J\varphi(x) = 0 \leadsto \text{ricavo } J\varphi(x)$$

Dim. Faccio 3 scelte

• Scelgo $m_0 > 0$ tale che $\| [J_y f(0,0)]^{-1} \| \leq \frac{1}{m_0}$

↑
norma di
matrice

• Scelgo $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tali che

$$\| J_y f(x,y) - J_y f(0,0) \| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x,y) \in B_{\delta_0}(0, \mathbb{R}^m) \times B_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k)$$

↑
matrice

• Scelgo $\delta_1 > 0$ tale che

$$|f(x,0)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} \quad \forall x \in B_{\delta_1}(0, \mathbb{R}^m)$$

↑
norma di vettore
in $\mathbb{R}^k$

(Parentesi: la norma di una matrice $M = \{M_{ij}\}$ è $(\sum_{i,j} M_{ij}^2)^{1/2}$ e ha la proprietà che $|Mx| \leq \|M\| \cdot |x|$)

Poniamo $\Phi_{(x)}(y) = y - [J_y f(0,0)]^{-1} f(x,y)$

e spero che, quando $x \in \overline{B_{\delta_1}}(0, \mathbb{R}^m)$, la funzione $\Phi_{(x)}(y)$ abbia un pto fisso unico.

Devo dimostrare

chiusura importante

(Φ1) $\Phi_{(x)}: \overline{B_{\varepsilon_0}}(0, \mathbb{R}^k) \rightarrow \overline{B_{\varepsilon_0}}(0, \mathbb{R}^k)$ (metrico completo)

(Φ2) $\Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$ -lip.

Come prima pongo $\Phi_{(x)}(y) = [J_y f(0,0)]^{-1} \{ J_y f(0,0) y - f(x,y) \}$

g(x,y)

Calcolo
da cui

$$J_y g(x, y) = J_y f(0, 0) - J_y f(x, y)$$

$$\|J_y g(x, y)\| = \| \dots \| \leq \frac{m_0}{2}$$

↑
per ipotesi

Verifica di (Φ_2)

$$\begin{aligned} |\Phi_{(x)}(y_2) - \Phi_{(x)}(y_1)| &= |[J_y f(0, 0)]^{-1} (g(x, y_2) - g(x, y_1))| \\ &\leq \underbrace{\|[J_y f(0, 0)]^{-1}\|}_{\leq \frac{1}{m_0}} \cdot \underbrace{|g(x, y_2) - g(x, y_1)|}_{\leq |y_2 - y_1| \cdot \|J_y g(\dots, \dots)\|} \\ &\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

$\leq \frac{m_0}{2}$

Verifica di (Φ_1) Devo dimostrare che $|\Phi_{(x)}(y)| \leq \varepsilon_0$ se $|y| \leq \varepsilon_0$.

Come prima $|\Phi_{(x)}(y)| \leq |\Phi_{(x)}(0)| + \underbrace{|\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)|}_{\leq \frac{1}{2} |y| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_0}$

perché $\Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$ -Lip

Resta da stimare

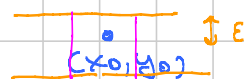
$$\begin{aligned} |\Phi_{(x)}(0)| &= |[J_y f(0, 0)]^{-1} f(x, 0)| \\ &\leq \underbrace{\|[J_y f(0, 0)]^{-1}\|}_{\leq \frac{1}{m_0}} \cdot \underbrace{|f(x, 0)|}_{\leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione.

Osservazione Il passaggio con Lagrange sulle matrice richiede qualche cautela in più perché vale solo componente per componente (i punti (ξ, η) dipendono dalla componente): si tratta di tenerne conto nella seconda scelta.

Abbiamo dimostrato esistenza e unicità di $\varphi(x)$ nell' intorno di ampiezze δ_1 su x ed ε_0 su y .

Come dimostro la continuità? Si ricicla le 2 dim. classiche
 → prendo nella seconda scelta ε piccolo quanto voglio e mi ritrovo un con. δ nella terza scelta
 → uso il lemma della sotto-sotto



Come dimostro la diff. in $(0,0)$?

Con lo sviluppo con Taylor Lagrange

$$0 = f(x, \varphi(x)) = J_x f(\xi, \eta) + J_y f(\xi, \eta) \varphi(x)$$

ricavo $\varphi(x)$ e passo al limite per $x \rightarrow 0$

Come sopra: (ξ, η) dipendono dalla componente, ma non importa !!!

Esercizio

$$\begin{cases} m^2 \arctan x + m \sin y + x = m \\ x^2 + mx + m^2 y + \cos(xy) = 1 + 5 \end{cases}$$

Per m abbastanza grande c'è soluzione (unica?) (x_m, y_m)

$$\begin{aligned} & f \begin{cases} \arctan x + z \sin y + z^2 x - z = 0 \\ z^2 x^2 + z x + y + z^2 \cos(xy) - z - 5z^2 = 0 \end{cases} \\ & g \end{aligned}$$

Devo verificare che

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,0)} \leadsto \text{Det} \neq 0$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 082

Titolo nota

08/03/2016

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA (Teo. invertibilità locale)**Teorema** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Supponiamo che

(i) f è di classe C^1 in Ω (ii) $Jf(x_0)$ è invertibile in un certo pto $x_0 \in \Omega$.Sia $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^m$.Allora esistono un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 e un intorno $\mathcal{V}$ di y_0 ,
ed esiste

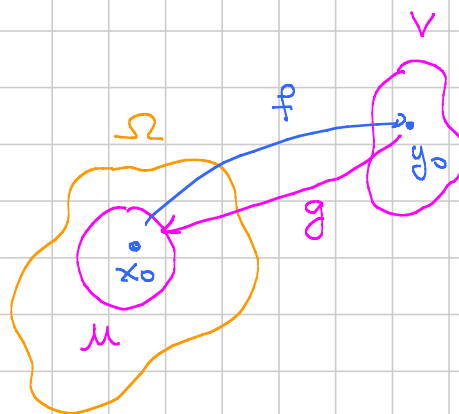
$$g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$$

tale che

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x & \forall x \in \mathcal{U} \\ f(g(y)) &= y & \forall y \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Inoltre g è di classe C^1 in $\mathcal{V}$ e

$$Jg(y) = [Jf(g(y))]^{-1}$$

Si posso assumere
aperti**Dim.** Immediata dato il teo. della funzione implicita.
Considero la funzione di $(2m)$ -variabili

$$\Phi(x, y) = y - f(x)$$

$$\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Considero $\Phi(x, y) = 0$ (sistema di m -equazioni in $2m$ -variabili)
e voglio esprimere x in funzione di y .Per questo serve la continuità di $\Phi(x, y)$ e l'invertibilità di

$J_x \Phi(x, y)$, cioè lo jacobiano risp. alla variabile x .
Ma

$$J\Phi(x, y) = \begin{array}{cc} m & n \\ \boxed{-Jf \quad Id} & m \end{array}$$

$\uparrow$
 per h_p è invertibile
 in x_0 e per continuità
 in un intorno

Teo funz. implicite $\Rightarrow$ esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ ed esiste

$$g: B_\varepsilon(y_0) \rightarrow B_\delta(x_0)$$

tale che $\Phi(g(y), y) = 0$, cioè $y - f(g(y)) = 0$, cioè

$$f(g(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in \underbrace{B_\varepsilon(y_0)}_{\downarrow}$$

Occhio: l'intorno $\mathcal{U}$ di x_0 cercato è $g(V)$, che potrebbe essere strettamente contenuto in $B_\delta(x_0)$.

La regolarità di g segue dal teo. delle funzioni implicite, così come la formula per lo jacobiano di g

$$Jg(y) : + \underbrace{[J_x \Phi(x, y)]^{-1}}_{+ Jf(g(y))} \underbrace{[J_y \Phi(x, y)]}_{Id}$$

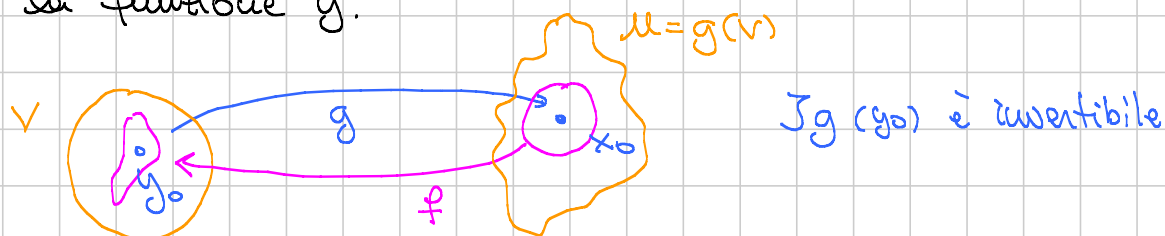
Oss. $g: \underbrace{B_\varepsilon(y_0)}_{\downarrow} \rightarrow B_\delta(x_0)$ è iniettiva. Posto $\mathcal{U} = g(V)$

è automatico che $g: V \rightarrow \mathcal{U}$ è invertibile.

Punto importante Bisogna dimostrare che U e V sono aperti, o per lo meno che $x_0 \in \text{Int}(U)$ e $y_0 \in \text{Int}(V)$

ovvio per costruzione

Per dimostrare che U è aperto devo ripetere il ragionamento con la funzione g .



COROLLARIO (Teorema della mappa aperta)

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$

Supponiamo che

$\uparrow$ aperto

(i) f è C^1 su Ω

(ii) $Jf(x_0)$ è invertibile

Allora $y_0 \in \text{Int}(f(\Omega))$

Achtung! • Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è C^1 e $f'(x) \geq \delta$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile globalmente

• Se f è come sopra e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(\mathbb{R}) = V \subseteq \mathbb{R}$ aperto e

$$f: \mathbb{R} \rightarrow V$$

è invertibile

In più variabili tutto questo non vale può succedere che

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $Jf(x)$ invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ma f non è suriettiva.

Esempio $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ $\swarrow$ banalmente non suriettiva

$$f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$$

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det Jf(x, y) = e^{2x} \neq 0$$

L'esempio può essere pensato su $\mathbb{C}$ invece che $\mathbb{R}^2$: $z \rightarrow e^z$

$$z = x + iy \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Generalizzazione to. mappa aperta

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $k \leq m$,
 $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$.

Supponiamo che

(i) f è C^1 in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ ha rango k (FULL RANK).

Allora

$$y_0 \in \text{Int}(f(\Omega))$$

(l'immagine contiene tutto un intorno di y_0)

Dim. Se $k = n$ è il teo. precedente

Supponiamo $k < n$ e poniamo $m = m - k$.

Indichiamo $x = (z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k)$

Supponiamo wlog. che

$$Jf(x_0) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline m & k \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow k \\ \text{invertibile} \end{array}$$

Considero

$$\Phi(x, y) = y - f(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k)$$

$$\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

e $J_{x_1, \dots, x_k}$ è invertibile in (x_0, y_0) . Allora per il teorema della funzione inversa posso ricavare

$$x_1, \dots, x_k$$

in funzione di

$$y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_m$$

Ora posso addirittura fissare $z_1 = \dots = z_m = 0$ e avere che ogni $(y_1, \dots, y_k)$ vicino a y_0 è immagine di un qualche x vicino ad x_0 con le prime m componenti nulle.

Ogni p.to in arrivo vicino a y_0 ha come controimmagine un sottoinsieme di Ω di dimensione m .



— o — o —

Ulteriore generalizzazione

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ (k qualunque)

$x_0 \in \Omega$, $y_0 = f(x_0)$

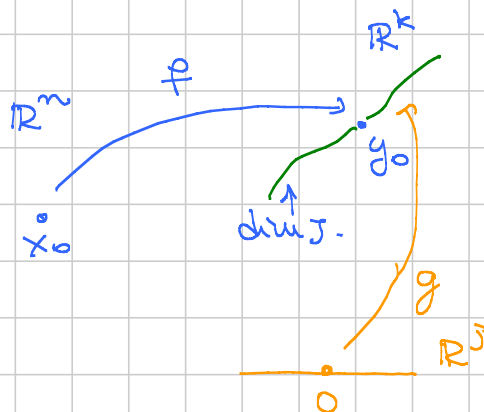
(i) $f \in C^1$ in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ ha rango J .

Allora moralmente l'immagine contiene una varietà di dimensione J passante per y_0

Detto meglio: esiste una funzione $g: B_\delta(0, \mathbb{R}^J) \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $Jg(0)$ di rango J tale che

$$\text{Im } g \subseteq \text{Im } f$$



ANALISI 2

-

LEZIONE 083

Titolo nota

08/03/2016

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, sia $V \subseteq \Omega$ un sottoinsieme, sia $z_0 \in V$.

Si dice che z_0 è pto di min. locale per f ristretta a V se esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(z_0) \subseteq \Omega$$

e

$$f(z) \geq f(z_0) \quad \forall z \in V \cap B_r(z_0)$$

Analogamente si definiscono i pto di max locale.

Teorema (Moltiplicatori di Lagrange)

Siano Ω, f, V, z_0 come sopra.

Supponiamo che z_0 sia pto di max/min locale per f in V .

Supponiamo che

(i) f sia C^1 in Ω

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

(ii) esista k funzioni $g_1, \dots, g_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$V = \{z \in \Omega : g_1(z) = \dots = g_k(z) = 0\}$$

Allora vale almeno una delle seguenti due opzioni

(1) $\text{rank}(Jg(z_0)) < k$ (g non è FULL RANK)

(2) esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\nabla f(z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(z_0)$$

(cioè $\nabla f(z_0) \in \text{Im}(Jg(z_0))$ pensato come appl. lin.)

Casi : $n=2, k=1$

$n = \text{qualsunque}, k=1$

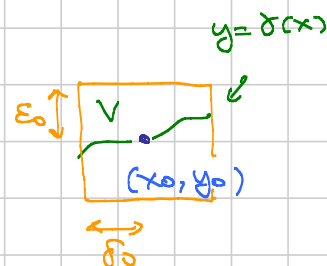
$n = \text{qualsunque}, k = \text{qualsunque}.$

Dim $n=2, k=1$ $f(x,y)$ funzione da minimizzare
 $g(x,y) = 0$ eq. di V
 $z_0 = (x_0, y_0)$

Se siamo in (1), allora $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$ e non c'è nulla da dire.

Altrimenti $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e supponiamo wlog che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Teo. funt. implicite $\Rightarrow$ vicino a (x_0, y_0) posso scrivere



$$V = \{ (x, \delta(x)) : x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \}$$

Considero la funzione $F(x) := f(x, \delta(x))$

$$F : [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

Per ipotesi F ha pto di max / min in x_0 , quindi

$$0 = F'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \delta'(x_0)$$

$\uparrow$
chain rule

So che (fun. funt. impl.) $\delta'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

Sostituendo trovo

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} g_x(x_0, y_0)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lambda \underbrace{g_y(x_0, y_0)}_0$$

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$
 Quindi siamo
 nel caso (2).

Dim 2 del caso $n=2, k=1$

Considero la funzione $\Phi(x,y) := (\underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0)}_{\mu}, \underbrace{g(x,y)}_{\nu})$

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0) \\ \nabla g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se siamo nei casi (1) e (2), allora $\text{rank } J\Phi(x_0, y_0) \leq 1$.
Se per assurdo non siamo in quei casi, allora

$J\Phi(x_0, y_0)$ è invertibile

Ma allora l'immagine di Φ contiene un intorno dell'immagine di (x_0, y_0) , cioè un intorno di $(0,0)$

Supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di min. loc.

Allora i p.ti del tipo $(-\frac{1}{n}, 0)$ non possono stare nell'immagine!

Prendiamo l'inversa ψ di Φ e poniamo

$$(x_n, y_n) := \psi\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$$

Sono ben definiti per n grande perché cascano in un intorno di $(0,0)$.

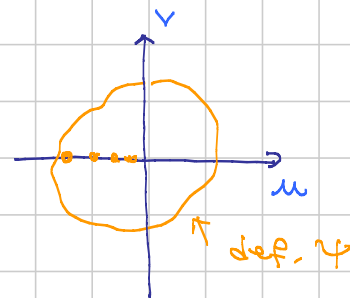
Ora $(x_n, y_n) \in V$ perché $g(x_n, y_n) = 0$

$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ per continuità dell'inversa

$$f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) = -\frac{1}{n}$$

$$\leadsto f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0) - \frac{1}{n}$$

quindi (x_0, y_0) non è p.to di min. locale.



Dim. con n generico e $k \geq 1$

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$$

$$g(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_x, y) = 0$$

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$\uparrow$ $n-1$ variabili

Se non siamo nel caso (i), allora $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, quindi
 wlog $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Ma allora per il teo. funz. implicite posso ricavare

$$y = \delta(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, \delta(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

e impongo che ∇F si annulli in x_0

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \underbrace{\frac{\partial \delta}{\partial x_i}(x_0, y_0)}_{\text{segue dal teo. funz. impl.}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) \quad i=1, \dots, n-1$$

λ indipendente da i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Questo mostra come prima che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

— o — o —

Dim 2 dello stesso caso Considero

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, y) := (f(x, y) - f(x_0, y_0), g(x, y))$$

Se non siamo in (1) o (2), allora $J\Phi(x_0, y_0)$ ha rango 2, quindi l'immagine di ogni intorno di (x_0, y_0) contiene un intorno dell'origine, il che non è buono.

Dim 1 del caso generale $m := n - k$

$$\begin{array}{l} f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \\ g_1(\dots) = 0 \\ \vdots \\ g_k(\dots) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{m var.} \\ \downarrow \\ \text{k variabili} \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_0 = (x_0, y_0) \\ \text{k equazioni del} \\ \text{vincolo} \end{array}$$

Considero $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$

$$\Phi(x, y) = (f(x, y) - f(x_0, y_0), \underbrace{g(x, y)}_{\text{k componenti}})$$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0) \\ \nabla g_1(x_0, y_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Sia nel caso (1), sia nel caso (2) il rank è $\leq k$.
Se per assurdo non fossimo in questi casi, avremmo rank $= k+1$, cioè FULL RANK, ma allora $\text{Im } \Phi$ contiene un intorno di $(0, 0)$. Questo vale per l'immagine di Φ ristretta ad ogni intorno di (x_0, y_0) , in particolare l'intorno in cui $(x_0, y_0) = z_0$ risulta pto di min / max ristretto a V .

L'assurdo segue come prima considerando i pti $(-\frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$
 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ proviene da V

ANALISI 2

LEZIONE 084

Titolo nota

09/03/2016

Dim. Mult. Lagrange

- ① Esplicitare il vincolo
- ② Usare mappa aperta con ϕ ausiliaria
- ③ Metodo di penalizzazione

Dim. con strategia ① nel caso generico $k < n$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione da minimizzare $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono le equazioni del vincolo V $z_0 \in V$ è un pto di min / max locale per f su V f e g sono di classe C^1 e $Jg(z_0)$ ha rango k Voglio dir che ∇f è comb. lin. di $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$.

Separo le variabili in 2 gruppi

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$$

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

e analogamente

$$g_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$$

Suppongo wlog che

 $J_y g(x_0, y_0)$ sia invertibilePer il teorema della funzione implicita posso ricavare y in funzione di x , cioè trovare δ tale che

$$g(x, \delta(x)) = 0$$

 k -equazioni $\forall x$ vicino ad x_0

Inoltre

$$J\delta(x_0) = - [J_y g(x_0, y_0)]^{-1} J_x g(x_0, y_0)$$

dimensioni compatibili

Come nel caso $k=1$, poniamo

$$F(x) := f(x, \delta(x)) \quad \text{definita vicino ad } x_0$$

La funzione F ha max/min in x_0 per h_p , quindi le sue derivate parziali si annullano. Quindi per ogni $i=1, \dots, m$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0, y_0) \frac{\partial \delta_j}{\partial x_i}(x_0) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{chain rule} \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), w_i \rangle \end{aligned}$$

dove $w_i = (\overbrace{0 \dots 0}^m \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} 0 \dots 0 \frac{\partial \delta_1}{\partial x_i}(x_0) \dots \frac{\partial \delta_k}{\partial x_i}(x_0))$

Poniamo $W := \text{Span}(w_1, \dots, w_m) \rightarrow$ ha $\dim(W) = m$ perché
messi uno sull'altro viene
Abbiamo appena dim. che Id_m a sx

$$\nabla f(x_0, y_0) \in W^\perp \leftarrow \text{ha dimensione } n-m=k$$

Se per caso $W^\perp$ fosse generato da $\nabla g_1(x_0, y_0), \dots, \nabla g_k(x_0, y_0)$ avremmo finito.

Ora

- sono esattamente k vettori
- sono lin. indep. per l'ipotesi di rango k
- resta da dimostrare che stanno in $W^\perp$, cioè che

$$\langle \nabla g_a(x_0, y_0), w_i \rangle = 0 \quad \forall a=1, \dots, k \quad \forall i=1, \dots, m$$

Usa che $g_a(x, \delta(x)) = 0$, quindi pongo $G_a(x) = g_a(x, \delta(x))$
e impongo $\frac{\partial G_a}{\partial x_i}(x_0) = 0$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x_i}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain} \\ \text{rule}}}{=} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial y_j}(x_0, y_0) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_0)$$

$$= \underbrace{\langle \nabla g(x_0, y_0), \underbrace{w_i}_0 \rangle}_0.$$

Riscrivo le stesse cose più brevemente. Come sopra considero

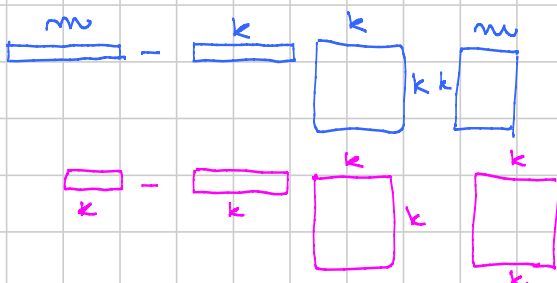
$$F(x) := f(x, \delta(x))$$

$$0 = \nabla F(x_0) = J_x f(x_0, y_0) + J_y f(x_0, y_0) J \delta(x_0)$$

$$= \nabla_x f(x_0, y_0) + \nabla_y f(x_0, y_0) J \delta(x_0)$$

$$0 = \nabla_x f(x_0, y_0) - \nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1} [J_x g(x_0, y_0)]$$

$$0 = \nabla_y f(x_0, y_0) - \nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1} [J_y g(x_0, y_0)]$$



Usando vettori e matrici ottengo

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) - \underbrace{\nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1}}_{\substack{\text{vettore riga lungo } k \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k)}} J_g(x_0, y_0)$$

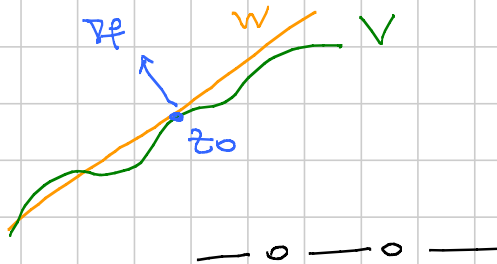
$$\lambda_1 \cdot 1^{\text{a}} \text{ riga} + \dots + \lambda_k \cdot k\text{-esima riga}$$

$$= \underbrace{\lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0)}_0 + \dots + \underbrace{\lambda_k \nabla g_k(x_0, y_0)}_0$$

Osservazione Chi è il W introdotto nella dim.?

È lo Span di $w_1, \dots, w_m$, cioè l'immagine del differenziale, cioè la giacitura dello spazio tangente al vincolo V in z_0 .

Intuitivamente già sapevamo che ∇f nei p.ti di max/min è ortogonale al vincolo.



Dim. con il metodo ③

Lemma Sia $\{A_k\}$ una successione di matrici $m \times n$

Supponiamo che

- (i) per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $\text{rank}(A_k) \leq J \leftarrow$ fisso, indip. da k
- (ii) $A_k \rightarrow A_\infty$ (convergenza el. per elemento)

Allora

$$\text{rank}(A_\infty) \leq J.$$

$(J+1) \times (J+1)$ di A_k

Dim. Per ipotesi sappiamo che tutti i minori $\uparrow$ hanno determinante uguale a 0.

Il Det è una funzione continua degli elementi.

Quindi gli stessi det. di A_∞ si annullano, quindi il rango di A_∞ è $\leq J$.

Corollario (stessa cosa detta diversamente) Il rango è SCI (semicont. sup.), cioè

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \text{rank}(A_k) \geq \text{rank}(A_\infty)$$

Os. Il rango può crollare al limite $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Corollario Siano $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ due succ. di vettori in $\mathbb{R}^{27}$.

Supponiamo che

(i) $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ sono lin. dip. per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $v_n \rightarrow v_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$

Allora

v_∞ e w_∞ sono lin. dip.

Tentazione:

$$a_n v_n + b_n w_n = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a_\infty v_\infty + b_\infty w_\infty$$

non le so

Dim. Applico il lemma con $A_n = (v_n | w_n)$. $\text{Rango } A_n \leq 1$
 $\Rightarrow \text{Rango } A_\infty \leq 1.$ $\square$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

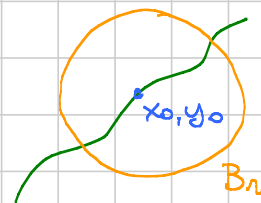
LEZIONE 085

Titolo nota

09/03/2016

Dim per penalizzazione $m=2$ e $k=1$ $f(x,y)$ da fare max/min $g(x,y)=0$ vincolo V (x_0, y_0) p.to di max/min locale su V Wlog supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di min e sia $r > 0$ t.c. il minimo è in

$$\overline{B_r}((x_0, y_0))$$

Step 1 Possiamo supporre che (x_0, y_0) sia p.to di min. STRETTO, cioè

$$f(x,y) > f(x_0, y_0)$$

per ogni $(x,y) \in V \cap B_r$ con $(x,y) \neq (x_0, y_0)$

Se non lo è, basta considerare

$$\hat{f}(x,y) = f(x,y) + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

Questa ha min. stretto in (x_0, y_0) e $\nabla \hat{f}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$ Step 2 Considero $f_m(x,y) := f(x,y) + m g^2(x,y)$

$$\uparrow$$

penalizzazione
Ora f_m è continua, $\overline{B_r}$ è compatto, quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ almeno che f_m ammette minimo in qualche punto

$$(x_m, y_m) \in \overline{B_r}$$
Idea: $(x_m, y_m) \rightarrow (x_0, y_0)$. D'altra parte

$$0 = \nabla f_m(x_m, y_m) = \nabla f(x_m, y_m) + 2m g(x_m, y_m) \nabla g(x_m, y_m)$$

Quindi $\nabla f(x_n, y_n)$ e $\nabla g(x_n, y_n)$ sono lin. dip.
 Passando al limite ed usando il lemma otteniamo che

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ e } \nabla g(x_0, y_0)$$

sono lin. dip. $\nearrow \nabla g(x_0, y_0) = 0$
 $\searrow \exists \lambda \text{ t.c. } \nabla f = \lambda \nabla g$

Step 3 Mostriamo che $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.
 Intanto osserviamo che

$$f_n(x_n, y_n) \leq f_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \quad (\star)$$

$\uparrow$ min. $\uparrow$ def.

A meno di s.succ., che non riusciamo, $(x_n, y_n) \rightarrow (x_\infty, y_\infty)$
 per compattezza.

$\rightarrow$ Dico che $(x_\infty, y_\infty) \in V$. Se così non fosse $g(x_\infty, y_\infty) \neq 0$,
 ma allora

$$f_n(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + n g^2(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\uparrow$
 $f(x_\infty, y_\infty)$ $+\infty$ > 0 impossibile per
 $(\star)$

$\rightarrow$ Dico che $(x_\infty, y_\infty) = (x_0, y_0)$. Se così non fosse

$$f_n(x_n, y_n) \geq f(x_n, y_n)$$

$\downarrow$
 $f(x_\infty, y_\infty)$

perché il minimo
 è stretto
 $\downarrow$

Quindi

$$\liminf f_n(x_n, y_n) \geq f(x_\infty, y_\infty) > f(x_0, y_0)$$

il che contraddice $(\star)$

Step 4 Poiché $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, definitivamente

$(x_n, y_n) \in B_n(x_0, y_0)$ aperta

cioè (x_n, y_n) è p.to di min. interno, quindi $\nabla f_n(x_n, y_n) = 0$
e si conclude come nell'idea iniziale.

Cosa cambia nel caso generale? Poco o nulla.

Si pone

$$f_n(x) := f(x) + n g_1^2(x) + \dots + n g_k^2(x)$$

$$f(x) + n g_1^2(x) + n^2 g_2^2(x) + \dots$$

A n fisso c'è un p.to di minimo x_n , che definitivamente è interno e

$$0 = \nabla f_n(x_n) = \nabla f(x_n) + 2n g_1(x_n) \nabla g_1(x_n) + \dots + \dots \nabla g_k(x_n)$$

Ad n fisso $\{\nabla f(x_n), \nabla g_1(x_n), \dots, \nabla g_k(x_n)\}$ sono lin. dip.

quindi per il lemma al limite la matrice

$$\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$$

ha rango $\leq k$. Da qui solita conclusione

$\rightarrow$ o gli ultimi k hanno rango $\leq k-1 \leadsto$ caso (1)

$\rightarrow$ " " " " " " k , quindi il primo è
lono comb. lin. $\leadsto$ caso (2).

Esercizio $f(x,y) = (x+y, x^2+y^2)$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Domande: $\rightarrow$ dove è loc. invertibile?
 $\rightarrow$ iniettiva?
 $\rightarrow$ surgettiva? Immagine?

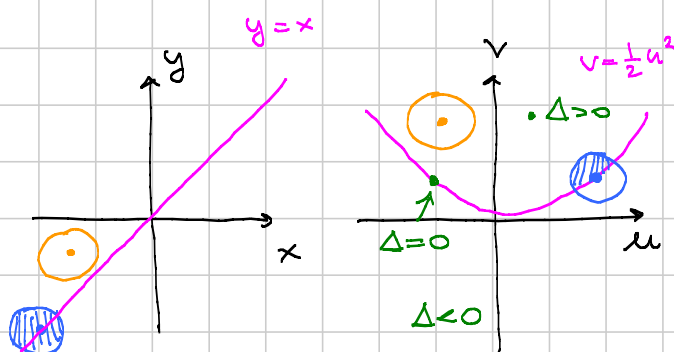
Locale invertibilità

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \quad \text{Det: } 2(y-x)$$

Invertibile nei p.ti con $x \neq y$.

Per pensarla scrivo

$$u = x+y \\ v = x^2+y^2$$



L'immagine di $y=x$ è $(t,t) \rightarrow (2t, 2t^2)$
 $v = \frac{1}{2} u^2$

Surgettività. Certamente i p.ti con $v < 0$ non stanno nell'imm.

$$x+y \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2+y^2} \rightsquigarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \rightsquigarrow v \geq \frac{1}{2} u^2 \\ u^2 \leq 2v$$

quindi i p.ti sotto la parabola $\notin$ Imm.

Idea. Tutti i p.ti sopra la parabola $\in$ Imm. $\rightarrow$ risolvo il sist

$$\begin{cases} x+y = u \\ x^2+y^2 = v \end{cases} \quad y = u-x \rightsquigarrow 2x^2 + u^2 - 2ux = v \\ \rightsquigarrow 2x^2 - 2ux + (u^2 - v)$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2u^2 + 2v}}{2} = \frac{u \pm \sqrt{2v - u^2}}{2}$$

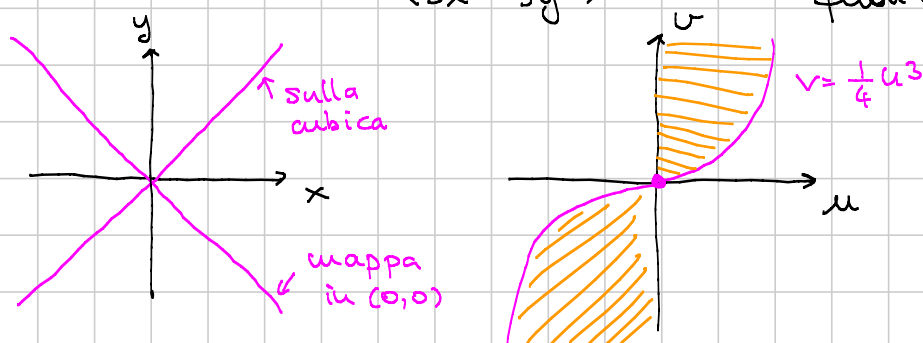
$$y := u - x$$

Si vede abbastanza facilmente che per ogni (u, v) sopra esistono 2 soluzioni, una con $y > x$, una con $y < x$

Inoltre f ristretta a ciascuno dei 2 semipiani a valori sopra la parabola è glob. invertibile.

Esempio 2 $f(x, y) = (x+y, x^3+y^3)$

Locale invertibilità: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix} = Jf$ $\det = 3(y^2 - x^2) \neq 0$
fuori dalle bisettrici



$$y=x \rightsquigarrow (2t, 2t^3) \rightsquigarrow v = \frac{1}{4} u^3$$

$$y=-x \rightsquigarrow (0,0) \rightsquigarrow \text{ADDIO INIETTIVITÀ}$$

$$\begin{aligned} x+y &= u & \rightsquigarrow & y = u-x & \rightsquigarrow & \cancel{x^3} + u^3 - 3u^2x + 3ux^2 - \cancel{x^3} = v \\ x^3+y^3 &= v \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow 3ux^2 - 3u^2x + (u^3 - v) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3u^2 \pm \sqrt{9u^4 - 12u^4 + 12uv}}{6u} = \frac{3u^2 \pm \sqrt{12uv - 3u^4}}{6u}$$

$$\begin{aligned} \text{I pti } (u, v) \text{ nell'immagine devono avere } & 4uv - u^4 \geq 0 \\ & u(v - \frac{1}{4}u^3) \geq 0 \end{aligned}$$

I pti con $u=0$ e $v \neq 0$ non stanno nell'immagine.

L'idea è che ciascuno dei 4 "triangoli" mappi 1-1
con una delle 2 componenti arancioni (segue dalle formule)

— o — o —

Esempio 3 $u = x^2 + \sin(xy) - y$
 $v = y^4 - \arctan(xy^2) + x$

→ Localmente invertibile in un intorno dell'origine

$$Jf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ surgettiva? Sembra!

$$u+v = \underbrace{x^2 + y^4}_{g(x,y)} + \text{robucola}$$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} g(x,y) = +\infty$, quindi per W. gen. g ha minimo

⇒ $u+v$ non può assumere valori sotto il minimo.

ANALISI 2

-

LEZIONE 086

Titolo nota

11/03/2016

Postilla sui mult. di Lagrange $f(x)$ $\leadsto$ funzione da fare max/min su V $g_1(x) = \dots = g_k(x) \leadsto$ vincoli che def. V

Le condizioni in un p.to x_0 di max/min locale si possono riscrivere come

(1) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c. x_0 è p.to stazionario per

$$\lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_k g_k(x)$$

(2) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c. x_0 è p.to stazionario per

$$f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

Vedendo (2) si può anche riscrivere dicendo

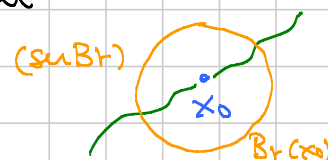
(2') $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c. $(x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ è p.to stazionario per

$$\underbrace{\Phi(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}_{n+k \text{ variabili}} := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

(l'annullarsi delle $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ sono le eq. del vincolo)**Lemma** (Cond. suff. affinché x_0 sia p.to di min. loc. su V)

Supponiamo che x_0 verifichi la cond. nec. (2). Supponiamo in aggiunta che x_0 sia p.to di min. locale per

$$F(x) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$



Allora x_0 è p.to di min. per $f(x)$ su V .

Dim. Per ogni $x \in B_r(x_0) \cap V$ vale la relazione $F(x) \geq F(x_0)$ dunque

$$f(x) - \lambda_1 \underline{g_1(x)} - \dots - \lambda_k \underline{g_k(x)} \geq f(x_0) - \lambda_1 \underline{g_1(x_0)} - \dots - \lambda_k \underline{g_k(x_0)}$$

Essendo su V tutti i termini con le g se ne vanno, quindi $f(x) \geq f(x_0)$.

— o — o —

Esempio 1 Consideriamo l'insieme V di eq.

$$\begin{cases} g_1: x + y + zx^2 + \arctan z = 0 \\ g_2: \sin x - y^2 = 0 \end{cases} \quad (0,0,0) \in V$$

$\exists r > 0$ t.c. $V \cap B_r(0,0,0)$ è una curva
Trovare il vettore tangente alla curva.

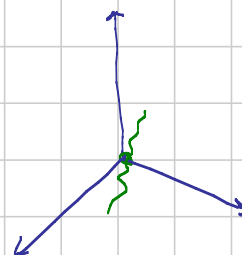
$$Jg(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Non posso (almeno immediata-} \\ \text{mente) ricavare } y \text{ e } z \text{ in funzio-} \\ \text{ne di } x$$

Posso ricavare x e y in funzione di z : $x(z), y(z)$.

Teo. funz. implicite $\Rightarrow$ in un intorno di $(0,0,0)$ l'insieme V si scrive come

$$V = \{ (x(z), y(z), z) : z \in (-\delta, \delta) \} \\ \quad (x(t), y(t), t) : t \in (-\delta, \delta)$$

"Il" vettore tangente sarà $(x'(0), y'(0), 1)$



Le derivate le posso calcolare con la formula generale

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -[J_{x,y} g(0,0,0)]^{-1} [J_z g(0,0,0)]$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e si fa il conto.}$$

In alternativa posso calcolare i polinomi di Taylor di $x(z)$ e $y(z)$ fino all'ordine che voglio.

Ad esempio all'ordine 1:

$$x(z) = az + o(z)$$

$$y(z) = bz + o(z)$$

Sostituisco nelle eq.:

$$\begin{aligned} az + bz + a \arctan z + o(z) &= 0 \\ \sin(az) + o(z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (a+b+1)z + o(z) = 0 \\ az + o(z) = 0 \end{cases}$$

$$\leadsto a=0, b=-1$$

La retta tangente a γ nell'origine è

$$(0,0,0) + t(0,-1,1)$$

$$\text{Calcoliamo } \nabla g_1(0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\nabla g_2(0,0,0) = (1,0,0)$$

$g_1(x,y,z)=0$ è una sup. vicino a $(0,0,0)$ che ha come piano tangente quello $\perp$ a $\nabla g_1(0,0,0)$ cioè $x+y+z=0$

$g_2(x,y,z)=0$ è una sup. piana con piano tangente $x=0$

La retta tangente a γ è l'intersezione dei 2 piani tang.

Oss. Volendo rappresentare la sup. $g_2(x,y,z)=0$ come grafico possiamo solo farlo nella forma

$$x = \varphi(y,z)$$

(l' unica deriv. part. di $g_2 \neq 0$ in $(0,0,0)$ è ∇_x)

Esempio 2 $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, y^2 + z^3, z^3 + x^4)$

$f(1,1,1) = (0, 2, 2)$. Vediamo se $(0, 2, 2) \in \text{Int}(\text{Im } f)$

Strategia: calcolo $Jf(1,1,1)$. Se ha rank = 3, allora $f(1,1,1)$ è interno all' immagine $\uparrow$ uguale a dim. spazio d'arrivo

Se fosse $f(x,y,z) := (x^2 - y^2, y^2 + z^3)$ basterebbe rango 2.

Esempio 3 $\underbrace{y^2 + y^4 + x \arctan x + x^6}_{f(x,y)} = 1 + \frac{\pi}{4}$

Definisce un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Come è fatto?

- Non vuoto e limitato : $f(1,0) = 1 + \frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

$\Rightarrow$ compatto

- Simmetrico rispetto asse x e asse y : se faccio

$$(x,y) \rightsquigarrow (x,-y) \quad \text{non cambia nulla}$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (-x,y) \quad \text{" " " "}$$

Quindi basta capire come è fatto nel 1° quadrante

- Per ogni $x \in [0,1]$ esiste unico y t.c. $(x,y) \in$ insieme
- " " $x > 1$ non esiste nessun y t.c. $(x,y) \in$ insieme

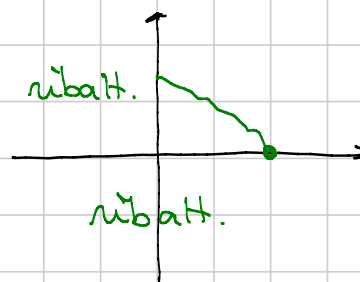
Basta osservare che, fissato x ,
la funzione

$$y \mapsto y^2 + y^4 + \dots$$

è strett. monotona per $y \geq 0$ e $\rightarrow +\infty$ per $y \rightarrow +\infty$,
quindi basta vedere quando

$$f(x, 0) \leq 0$$

il che accade $\Leftrightarrow x \in [0, 1]$



- È regolare? Sì è C^∞

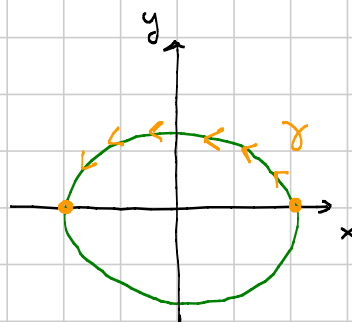
Basta dimostrare che $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ in tutti i p.ti
dell'insieme. Qui

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

- Sia γ la parte alta e sia

$$\omega = y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$$

$$\int_{\gamma} \omega = ?$$



La forma è esatta 😊, quindi basta fare una primitiva
e fare la diff. tra i valori agli estremi (che conosco).

- ruotare γ intorno all'asse y , ottenere una sup. S ,
e calcolare il flusso attraverso S (orientata in qualche
modo) di un campo $\vec{E}$ a div nulla

Essendo a div. nulla è un rotore, quindi posso cambiare
la sup. a parità di bordo, quindi posso fare il flusso su
un cerchio

