

Riassunto puntate precedenti

Definizioni mis. Lebesgue: due vie possibili (equivalenti)

- 1 - via metodo I + costruzione di Carathéodory + misura additiva sui distanti (o teorema Hahn-Kolmogorov) $\leadsto$ i boreliani sono misurabili
- 2 - Si definisce prima sugli aperti e sui compatti, poi misura interna ed esterna, poi misurabile $\Leftrightarrow$ interna ed esterna coincidono.

Definizioni di integrale: due vie possibili (equivalenti)

- 1 - si definisce sulle $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ approx da sotto con step functions finite; poi si estende a $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ usando f^+ ed f^-
- 2 - si definisce subito sulle $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ l'integrale inferiore e superiore mediante approx da sotto e da sopra con step functions con immagine numerabile; se coincidono ...
— o — o —

TRE TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE

TEOREMA DI BEPPO LEVI (Teorema di Lebesgue di convergenza monotona)

Sia (X, m, μ) spazio di misura. Sia una successione crescente, cioè

$$f_{m+1}(x) \geq f_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$$

Allora

$$\int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu$$

(teorema di scambio)

misurabili

≥ 0

incluso

Oss. LHS e RHS possono valere $+\infty$

Oss. Se $f_n(x) = \mathbb{1}_{A_n}(x)$, allora $A_{n+1} \supseteq A_n$ ed è il lemma già visto di passaggio al limite della misura

LEMMA DI FATOU Sia (X, m, μ) sp. di misura e siano $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili (≥ 0 , ma non nec. monotone). Allora

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu$$

Oss. Può valere il $<$ stretto $X = [0, 2]$ oppure $X = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0, 1]}(x) & \text{se } n \text{ pari} \\ \mathbb{1}_{[1, 2]}(x) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA (Lebesgue)

Sia (X, m, μ) sp. di misura, e siano $f_n: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ funzioni misurabili (no vincoli di segno o monotonia)

Supponiamo che

(i) esiste il limite **PUNTUALE**

$$f_\infty(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$$

(ii) esiste $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

$$\int_X g(x) d\mu < +\infty$$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

"Dominazione"

Allora vale lo scambio

$$\int_{\mathbb{X}} f_{\infty}(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n(x) d\mu$$

Oss. La dominazione SERVE. Ad esempio

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \quad f_{\infty}(x) \equiv 0$$

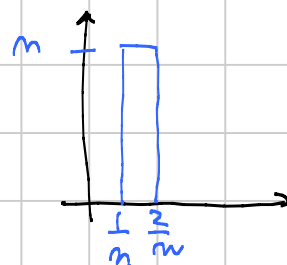
$$\int_{\mathbb{X}} f_n(x) dx = 1 \quad \int_{\mathbb{X}} f_{\infty}(x) = 0$$

↑
Lebesgue in $\mathbb{R}$

$$f_n(x) := n \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(x) \quad f_{\infty}(x) \equiv 0$$

$$\int_{\mathbb{X}} f_n(x) dx = 1 \quad \int_{\mathbb{X}} f_{\infty}(x) = 0$$

— 0 — 0 —



Oss. Beppo Levi non vale con l'inf nel caso di $f_n: \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty]$ decrescenti

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{[n, +\infty)}(x) \quad \text{sono decrescenti}$$

$$\int_{\mathbb{X}} f_n(x) dx = +\infty \quad \text{ma} \quad \int_{\mathbb{X}} \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx = 0$$

Se ce ne fosse uno finito, sarebbe la convergenza dominata

Oss. Beppo Levi vale con l'inf. nel caso di $f_n: \mathbb{X} \rightarrow [-\infty, 0]$ decrescenti.

Oss. Fatou vale per $f_n: \mathbb{X} \rightarrow [-\infty, 0]$ nella forma

$$\int_{\mathbb{X}} \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n(x) d\mu$$

Dim. Fatou dato Beppo Levi Poniamo

$$g_n(x) := \sup_{k \geq n} f_k(x) \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora $g_n(x) \leq f_k(x) \quad \forall x \in X$ e per ogni $k \geq n$,
quindi

$$\int_X g_n(x) d\mu \leq \int_X f_k(x) d\mu$$

e facendo l'inf su k

$$\int_X g_n(x) d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\mu \quad (*)$$

Osservo che $g_n(x)$ è una successione crescente e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) \quad \forall x \in X$$

def. di liminf

Allora

def. liminf

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu = \int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) d\mu$$

$$(\text{Beppo Levi}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X g_n(x) d\mu$$

$$(*) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x) d\mu$$

$$(\text{def. di liminf}) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu$$

— 0 — 0 —

Variante di Beppo Levi per succ. decrescenti

(X, m, μ) sp. di misura, $f_n: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ decrescenti e misurabili.

Supponiamo che $\int_X f_1(x) d\mu < +\infty$.

Allora

$$\int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu$$

Dim. Basta fare le differenze, cioè porre

$$\varphi_n(x) := f_1(x) - f_n(x).$$

Allora le $\varphi_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ sono una succ. crescente e

$$\int_X \varphi_n(x) d\mu = \underbrace{\int_X f_1(x) d\mu}_{\text{numero}} - \int_X f_n(x) d\mu$$

Applico Beppo Levi

$$\int_X \varphi_\infty(x) d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X \varphi_n(x) d\mu$$

$$\text{Ma RHS} = \int_X f_1(x) d\mu - \inf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu$$

$$\begin{aligned} \text{e LHS} &= \int_X [f_1(x) - \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)] d\mu \\ &= \int_X f_1(x) d\mu - \int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) d\mu \end{aligned}$$

Semplificando $\int_X f_1(x) d\mu$ ho la tesi.

Variante di Fatou per il limsup

(X, m, μ) sp. di misura, $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$.

Supponiamo che esista

$$g : X \rightarrow [0, +\infty]$$

tale che

$$f_n(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_X g(x) dx < +\infty$$

Allora

$$\int_X \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu$$

Dim. Considero le differenze

$$\varphi_n(x) := g(x) - f_n(x) \quad \varphi_n : X \rightarrow [0, +\infty]$$

e applico il Fatou classico alla $\varphi_n \geq 0$ dopo aver osservato che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = g(x) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

— 0 — 0 —